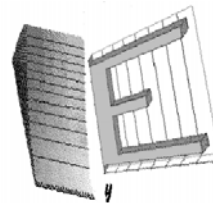




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN



SEMESTRE 2009-2
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS

TIPO 1
JUNIO 17 DE 2009

NOMBRE _____

1. Una muestra aleatoria del porcentaje de algodón en una tela utilizada para elaborar camisetas está representada en la tabla de distribución de frecuencias

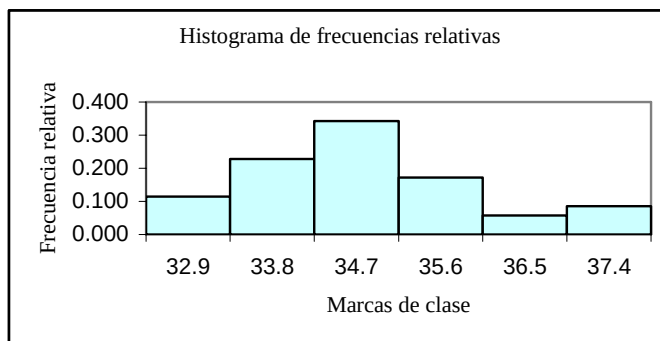
Clase	L_{inf}	L_{sup}	Fr_i	Fr_s	x_i	f_i	f_i^*	F_i	F_i^*
1	32.5	33.3	32.45	33.35	32.9	4	0.114	4	0.114
2	33.4	34.2	33.35	34.25	33.8	8	0.229	12	0.343
3	34.3	35.1	34.25	35.15	34.7	12	0.343	24	0.686
4	35.2	36.0	35.15	36.05	35.6	6	0.171	30	0.857
5	36.1	36.9	36.05	36.95	36.5	2	0.057	32	0.914
6	37.0	37.8	36.95	37.85	37.4	3	0.086	35	1.000
						35			

- Trazar el histograma de frecuencias relativas.
- Calcular las medidas de tendencia central y trazar el polígono de frecuencias con las medidas obtenidas.
- Trazar la ojiva de frecuencias acumuladas relativas.

15 Puntos

Resolución

- El histograma es



- El polígono de frecuencias y las medidas de tendencia central son:
La media está definida por

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i f_i = \sum_{i=1}^m x_i f_i^*$$

sustituyendo se tiene

$$\bar{x} = \frac{1}{35} \sum_{i=1}^6 x_i f_i = \frac{1}{35} [(32.9)(4) + \dots + (37.4)(3)] = \frac{1217.2}{35} = 37.777$$

La mediana es el valor que divide a la muestra en dos partes iguales, entonces realizando una interpolación

Fronteras	Fi
34.25	12
$\tilde{x}$	17.5
35.15	24

$$m = \frac{24-12}{35.15-34.25} = \frac{12}{0.9} = 13.333$$

con la ecuación de una recta dado un punto y la pendiente, se tiene

$$y - 12 = 13.333(x - 34.25)$$

con $(\tilde{x}, 17.5)$, sustituyendo:

$$17.5 - 12 = 13.333(\tilde{x} - 34.25)$$

$$\tilde{x} = \frac{5.5}{13.333} + 34.25$$

$$\tilde{x} = 34.663$$

La moda es la marca de clase con mayor frecuencia, entonces

$$x_{mo} = 34.7$$

O bien, se puede obtener como

$$x_{mo} = L_{mo\ inf} + \left[\frac{a}{a+b} \right] c_{mo}$$

$$a = f_{mo} - f_{mo-1}$$

$$b = f_{mo} - f_{mo+1}$$

donde

f_{mo} es la frecuencia absoluta que contiene a la moda.

c_{mo} es la longitud de la clase que contiene a la moda.

$L_{mo\ inf}$ es el límite inferior de la clase que contiene a la moda.

sustituyendo en la expresión anterior, se tiene

$$x_{mo} = 34.25 + \left[\frac{4}{4+6} \right] (0.9)$$

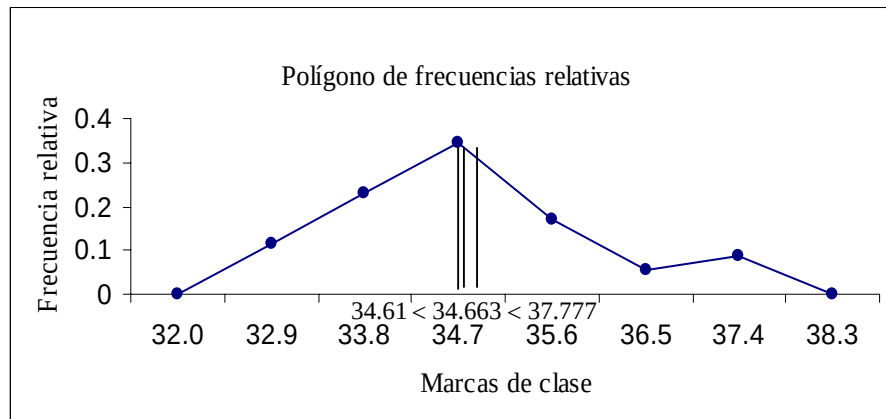
$$x_{mo} = 34.61$$

La posición de las medidas de tendencia central, son

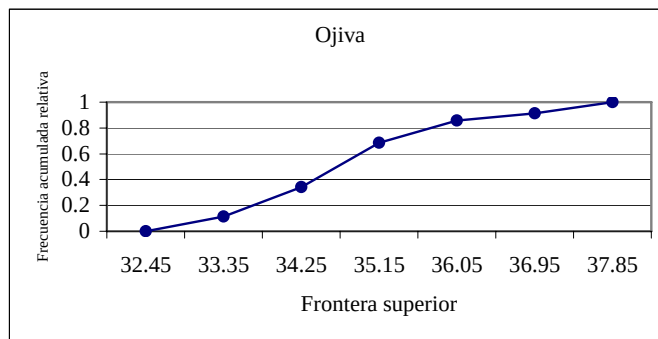
$$x_{mo} < \tilde{x} < \bar{x}$$

$$34.61 < 34.663 < 37.777$$

Como se observa en la gráfica.



c) La ojiva es



2. Un minorista vende dos tipos de pantallas planas de LCD, la experiencia demuestra que tienen la misma demanda. Cuatro clientes entran uno tras otro a la tienda y solicitan pantallas planas.

a) Describir el espacio muestral del experimento aleatorio.

b) Sea A el evento que representa, al menos dos clientes prefieren una pantalla plana del mismo tipo.
Sea B el evento que representa, exactamente dos clientes prefieren una pantalla plana del mismo tipo.

Calcular $P(A|B)$ y $P(B|A)$

15 Puntos

Resolución

Sea 1 el evento que representa a las pantallas planas de LCD del tipo I.

Sea 2 el evento que representa a las pantallas planas de LCD del tipo II.

a) El espacio muestral del experimento aleatorio es

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} 1111, & 1112, & 1121, & 1122 \\ 1211, & 1212, & 1221, & 1222 \\ 2111, & 2112, & 2121, & 2122 \\ 2211, & 2212, & 2221, & 2222 \end{array} \right\}$$

b) Los eventos tienen los puntos

$$A = \left\{ \begin{matrix} 1111, & 1112, & 1121, & 1122 \\ 1211, & 1212, & 1221, & 1222 \\ 2111, & 2112, & 2121, & 2122 \\ 2211, & 2212, & 2221, & 2222 \end{matrix} \right\} = S$$

$$B = \{1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211\}$$

Las probabilidades asociadas son: $P(A) = P(S) = 1$, $P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{1} = P(B) = \frac{3}{8}$$

3. Supóngase que el error en la temperatura de reacción, en grados Celsius, para un experimento de laboratorio controlado, es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & ; \quad -1 < x < 2 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Obtener la función de distribución que muestra el comportamiento acumulado.
- Usar el resultado del inciso (a) para calcular la probabilidad de que el error en la temperatura de reacción sea mayor de 0 [°C]

10 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa el error en la temperatura de reacción, en [°C].

- La función de distribución que muestra el comportamiento acumulado dado que es variable continua, es

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x f_x(t) dt$$

sustituyendo

$$F_x(x) = \int_{-1}^x \frac{1}{3}t^2 dt = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}t^3 \right]_{-1}^x = \frac{1}{9} [x^3 + 1] \quad ; \quad -1 < x < 2$$

entonces la función de distribución que muestra el comportamiento acumulado es

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{9} [x^3 + 1] & ; \quad -1 < x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

- Se pide calcular $P(X > 0)$, entonces

$$F_x(x) = P(X < x) = P(X \leq x)$$

sustituyendo

$$P(X > 0) = 1 - F_x(x) = 1 - P(X \leq x)$$

$$P(X > 0) = 1 - F_x(0) = 1 - \left[\frac{1}{9} [0^3 + 1] \right] = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

4. Se sabe que el tiempo en minutos que una secretaria habla por teléfono, es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_T(t) = \begin{cases} C e^{-\frac{t}{40}} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Calcular el valor de C para que la función sea de densidad.
- Obtener la variancia del tiempo en minutos que la secretaria habla por teléfono.
- Calcular la probabilidad de que una secretaria hable más de 10 minutos por teléfono.

15 Puntos

Resolución

Sea T la v.a. que representa el tiempo en minutos que una secretaria habla por teléfono.

Se tiene que T es una v.a. con distribución exponencial, esto es

$$T \sim \text{Exp}\left(\lambda = C = \frac{1}{40}\right)$$

- De lo anterior $c = \frac{1}{40}$

por lo tanto, la función es

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{40} e^{-\frac{t}{40}} & ; \quad t > 0 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- El tiempo promedio es la media de la variable aleatoria exponencial, entonces

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{40}} = 40 \quad [\text{min}]$$

La variancia de la variable aleatoria está dada por

$$\text{Var}(T) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{40}\right)^2} = (40)^2 = 1600 \quad [\text{min}^2]$$

- Se pide calcular $P(T > 10)$, entonces se usan propiedades de la función exponencial

$$P(T > 10) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{1}{40}(10)} = e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.779$$

5. Dos líneas de producción manufacturan cierto tipo de artículos deportivos. Supóngase que la producción (en cualquier día dado), es de la siguiente forma, sea X la variable aleatoria que representa el número de artículos deportivos producidos en la línea I y, Y la variable aleatoria que representa el número de artículos producidos en la línea II, la distribución de probabilidad conjunta es

$f_{XY}(x,y)$		y			
		0	1	2	3
x	0	0	0.04	0.12	0.09
	1	0.02	0.14	0.21	0.14
	2	0.07	0.06	0.06	0.05

- Calcular la probabilidad de que en la línea I se produzcan más artículos deportivos que en la línea II. Obtener la probabilidad de que se produzcan en total tres artículos deportivos.
- Determinar la función marginal del número de artículos producidos en la línea I.
- Cuál es la función de probabilidad condicional, dado que se producen dos artículos en la línea I.

- d) En promedio cuántos artículos se espera sean producidos en la línea II, si se sabe que en la línea I se producen dos.

20 Puntos

Resolución

- a) Se pide calcular $P(X > Y)$, entonces

$$P(X > Y) = f_{XY}(1,0) + f_{XY}(2,0) + f_{XY}(2,1) = 0.02 + 0.07 + 0.06 = 0.15$$

Se pide obtener $P(T = 3 = X + Y)$, sustituyendo

$$P(T = 3 = X + Y) = f_{XY}(0,3) + f_{XY}(1,2) + f_{XY}(2,1)$$

$$P(T = 3) = 0.09 + 0.21 + 0.06 = 0.36$$

- b) La función marginal para el número de artículos producidos por la línea I, está definida por

$$f_X(x) = \sum_{\forall y} f_{XY}(x, y)$$

sustituyendo

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.25	0.51	0.24

- c) La función condicional, dado que se producen dos artículos en la línea I, está dada por

$$f_{Y|X=2}(Y|X=2) = \begin{cases} \frac{f_{XY}(2,y)}{f_X(X=2)} & ; f_X(X=2) > 0 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

sustituyendo

Y	0	1	2	3
$f_{Y X=2}(Y X=2)$	0.292	0.250	0.250	0.208

- d) En promedio cuántos artículos se espera sean producidos en la línea II, si se sabe que en la línea uno se producen dos. Por lo tanto se pide el valor esperado, del inciso anterior

$$E(Y|X=2) = \sum_{\forall y} y f_{Y|X=2}(Y|X=2)$$

sustituyendo

$$E(Y|X=2) = (1)(0.250) + (2)(0.250) + (3)(0.208) = 1.374$$

Se espera una producción de dos artículos deportivos en la línea II, dado que en la línea uno se producen dos.

6. Las calificaciones de un examen de colocación que se aplicó a estudiantes de primer año de una universidad al sur del D.F., durante los últimos cinco años están distribuidas aproximadamente de forma normal con una media de 74 y una variancia de ocho. ¿Considera que la variancia ocho es un valor válido de la variancia si una muestra aleatoria de 20 estudiantes, quienes realizan tal examen de colocación este año, obtienen un valor de la variancia de $S_{n-1}^2 = 20$?

15 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa la calificación de un examen de colocación.

$$X \sim Normal(\mu_X = 74, \sigma_X^2 = 8)$$

Se pide calcular si es válida la variancia de la muestra, $S_{n-1}^2 = 20$, entonces

$$P\left(S_{n-1}^2 > 20 \mid \sigma^2 = 8\right)$$

transformando en distribución Ji cuadrada, con 19 grados de libertad, usando calculadora

$$P\left(\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} > \frac{(19)(20)}{8}\right) = P\left(X_{(\alpha,19)}^2 > \frac{(19)(20)}{8}\right) = P\left(X_{(\alpha,19)}^2 > 47.5\right) \approx 0.000303$$

Usando tabla de la distribución Ji cuadrada, con 19 grados de libertad y abscisa 47.5

$$P\left(X_{(\alpha,19)}^2 > 47.5\right) < 0.001$$

Es muy poco probable que la variancia muestral sea de 20, entonces no es válido.

7. Se realizó un estudio para determinar los efectos de no dormir en la capacidad de las personas para resolver problemas sencillos. La cantidad variaba de 8, 12, 16, 20 a 24 horas sin dormir. Cinco personas participaron en el estudio. Se dio a cada persona, después de un periodo específico sin dormir, un conjunto de problemas sencillos de sumar y se registro el número de errores. Se obtuvieron los siguientes resultados

número de errores, (y)	8	10	14	12	16
número de horas sin dormir, (x)	8	12	16	20	24

- Determinar la recta apropiada de mínimos cuadrados para estos datos.
- Trazar el diagrama de dispersión y la recta del inciso (a).

10 Puntos

Resolución

- El ajuste de los datos a un modelo lineal de regresión por el criterio de mínimos cuadrados está dado por

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

donde

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

realizando los productos y las sumas, se tiene

x	y	x^2	y^2	xy	
8	8	64	64	64	
12	10	144	100	120	
16	14	256	196	224	
20	12	400	144	240	
24	16	576	256	384	
Suma:	80	60	1440	760	1032

de donde

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n} = 1440 - \frac{(80)^2}{5} = 160$$

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n} = 1032 - \frac{(80)(60)}{5} = 72$$

sustituyendo

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{72}{160} = 0.45$$

para calcular los promedios, se tiene

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5}(80) = 16$$

y

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{5}(60) = 12$$

sustituyendo

$$\hat{\beta}_0 = 12 - (0.45)(16) = 4.8$$

por lo tanto el modelo lineal de regresión es

$$\hat{y} = 0.45x + 4.8$$

b) El diagrama de dispersión y la recta del inciso (a) son

