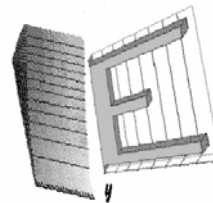




UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN



SEMESTRE 2009-2
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS

TIPO 2
JUNIO 11 DE 2009

NOMBRE _____

1. "Scram" es el término que utilizan los ingenieros nucleares para describir un rápido cierre de emergencia de un reactor nuclear. La industria nuclear ha hecho esfuerzos por reducir significativamente el número de cierres no planeados. La tabla muestra el número de "Scrams" en cada uno de 56 reactores nucleares en E.U.A.; 2004
- Agrupar los datos en ocho intervalos, con un ancho de clase de dos y comenzando en la frontera inferior -0.5
 - Calcular la media del número de "Scrams" para datos agrupados.
 - Obtener el segundo cuartil (la mediana) para datos agrupados.

Marcas de clase	Frecuencia absoluta
0.5	10
2.5	19
4.5	13
6.5	7
8.5	4
10.5	1
12.5	1
14.5	1

15 Puntos
Resolución

- a) La tabla de distribución de frecuencias es

Límites	Fronteras	Marcas de clase	f_i	f_i^*	F_i	F_i^*
0 - 1	-0.5 - 1.5	0.5	10	0.178	10	0.178
2 - 3	1.5 - 3.5	2.5	19	0.339	29	0.518
4 - 5	3.5 - 5.5	4.5	13	0.232	42	0.750
6 - 7	5.5 - 7.5	6.5	7	0.125	49	0.875
8 - 9	7.5 - 9.5	8.5	4	0.071	53	0.946
10 - 11	9.5 - 11.5	10.5	1	0.018	54	0.964
12 - 13	11.5 - 13.5	12.5	1	0.018	55	0.982
14 - 15	13.5 - 15.5	14.5	1	0.018	56	1.000
			56			

- b) El promedio de "Scrams" para datos agrupados está dada por la expresión

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i f_i = \sum_{i=1}^m x_i f_i^*$$

sustituyendo

$$\bar{x} = \frac{1}{56} \sum_{i=1}^8 x_i f_i = \frac{1}{56} [(0.5)(10) + \dots + (14.5)(1)] = \frac{228}{56} = 4.071$$

- c) El segundo cuartil es un valor que divide al conjunto de datos en dos subconjuntos de igual tamaño, se obtiene mediante una interpolación lineal, entre las fronteras y la frecuencia acumulada, de tal manera que se acumulen 28 datos, el valor de la frontera resultado de la interpolación, será el segundo cuartil, mismo que coincide con la mediana.

Fronteras	Fi
1.5	10
$\tilde{x}$	28
3.5	29

$$m = \frac{29-10}{3.5-1.5} = \frac{19}{2} = 9.5$$

con la ecuación de una recta dado un punto y la pendiente, se tiene

$$y - 10 = 9.5(x - 1.5)$$

con $(\tilde{x}, 28)$, sustituyendo

$$28 - 10 = 9.5(\tilde{x} - 1.5)$$

$$\tilde{x} = \frac{18}{9.5} + 1.5 = \frac{129}{38}$$

$$\tilde{x} = 3.395$$

2. En una planta de artículos electrónicos, se sabe por experiencia que la probabilidad de que un nuevo trabajador que haya asistido al programa de capacitación conozca la cuota de producción es 0.9 y que la probabilidad correspondiente es 0.4 para otro que no haya asistido. Si el 75 % de todos los empleados de ingreso reciente asisten al programa, determinar la probabilidad de que un nuevo empleado no conozca la cuota de producción.

10 Puntos

Resolución

Sean los eventos

A : El trabajador asistió al programa de capacitación.

B : El trabajador conoce la cuota de producción.

Se pide calcular la probabilidad de que un nuevo empleado no conozca la cuota de producción, $P(\bar{B})$.

De los datos se tiene: $P(A) = 0.75$, $P(\bar{A}) = 0.25$, $P(B|A) = 0.9$ y $P(B|\bar{A}) = 0.4$

Del teorema de probabilidad total

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$$

sustituyendo

$$P(B) = 0.75(0.9) + 0.25(0.4) = 0.775$$

entonces

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.775 = 0.225$$

3. Una tienda de computadoras adquirió tres computadoras Acer a \$3900.00 cada una. Las venderá a \$5750.00 cada una. El fabricante se comprometió a adquirir cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado a \$2250.00 cada una. Sea X la variable aleatoria que representa el número de computadoras vendidas y supóngase que $P(X=0)=0.1$, $P(X=1)=0.2$, $P(X=2)=0.3$ y $P(X=3)=0.4$. Donde $U(X)$ denota la utilidad asociada con la venta de X unidades, la información dada implica que $U(X) = \text{Ingresos} - \text{Costos} = 5750X + 2250(3-X) - 11700 = 3500X - 4950$.
- Calcular la utilidad esperada.
 - Determinar el coeficiente de variación de la utilidad.

15 Puntos

Resolución

La función de probabilidad de X se puede escribir, como

x	0	1	2	3
$f_x(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

- a) La utilidad está dada por

$$U(X) = \text{Ingresos} - \text{Costos} = 5750X + 2250(3-X) - 11700 = 3500X - 4950$$

entonces la utilidad esperada es

$$E[U(X)] = E(3500X - 4950) = 3500E(X) - 4950$$

El valor esperado del número de computadoras vendidas está definido por

$$E(X) = \sum_{\forall x} x f_x(x)$$

sustituyendo

$$E(X) = (0)(0.1) + (1)(0.2) + (2)(0.3) + (3)(0.4)$$

$$E(X) = 2$$

sustituyendo en la utilidad esperada

$$E[U(X)] = 3500(2) - 4950 = 2050$$

- b) La variancia de la utilidad esperada es el segundo momento con respecto de la media, o bien, el segundo momento con respecto del origen menos el primero al cuadrado

$$\text{Var}[U(X)] = \text{Var}(3500X - 4950) = (3500)^2 \text{Var}(X)$$

Se sabe que la variancia está definida por

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

calculando

$$E(X^2) = \sum_{\forall x} x^2 f_x(x)$$

sustituyendo

$$E(X^2) = (0)^2(0.1) + (1)^2(0.2) + (2)^2(0.3) + (3)^2(0.4)$$

$$E(X^2) = 5$$

La variancia es

$$\text{Var}(X) = 5 - [2]^2 = 1$$

La variancia de la utilidad es

$$\text{Var}[U(X)] = (3500)^2$$

La desviación estándar de la utilidad es la raíz de la variancia

$$\sigma_U = \sqrt{\text{Var}(U(X))} = \sqrt{(3500)^2} = 3500$$

El coeficiente de variación de la utilidad es

$$CV_U = \frac{\sigma_U}{\mu_U} = \frac{3500}{2050} = 1.707$$

4. El chef de un restaurante de comida cantonesa prepara una ensalada que contiene, en promedio, cuatro vegetales. Obtener la probabilidad de que la ensalada contenga más de cuatro vegetales:

- en un día dado,
- por cuarta vez en abril, el octavo día.

15 Puntos

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de vegetales que contiene la ensalada.

$$X \sim \text{Poisson}\left(\lambda = 5 \frac{\text{vegetales}}{\text{ensalada}}\right)$$

- a) La probabilidad de que la ensalada tenga más de cuatro vegetales en un día dado, es

$$P(X > 4) = 1 - \sum_{x=0}^4 \frac{4^x e^{-4}}{x!}$$

desarrollando

$$P(X > 4) = 1 - \left[\frac{4^0 e^{-4}}{1} + \frac{4^1 e^{-4}}{1} + \frac{4^2 e^{-4}}{2} + \frac{4^3 e^{-4}}{6} + \frac{4^4 e^{-4}}{24} \right]$$

$$P(X > 4) = 1 - e^{-4} \left[1 + 4 + \frac{16}{2} + \frac{64}{6} + \frac{256}{24} \right]$$

$$P(X > 4) = 1 - \frac{103}{3} e^{-4} \approx 0.371$$

- b) Sea Y la variable aleatoria que representa el octavo día de abril es el cuarto día que la ensalada del chef contiene más de cuatro vegetales.

$$Y \sim \text{Pascal}(r = 4, p = 0.371)$$

entonces

$$P(Y = 8) = \binom{7}{3} (0.371)^4 (0.629)^4 \approx 0.104$$

5. Sea la función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{96} & ; 1 < x < 5, 0 < y < 4 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Obtener las funciones de densidad marginal.
- ¿Son X y Y variables aleatorias conjuntas independientes?
- Obtener la covarianza.

15 Puntos

Resolución

- a) Las funciones marginales están definidas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy \quad y \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$$

sustituyendo se tiene

$$f_x(x) = \int_0^4 \frac{1}{96} xy \, dy = \frac{1}{96} x \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{1}{192} x(16-0) = \frac{1}{12} x \quad ; \quad 1 < x < 5$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} x & ; \quad 1 < x < 5 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

para la función marginal de Y

$$f_Y(y) = \int_1^5 \frac{1}{96} xy \, dx = \frac{1}{96} y \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^5 = \frac{1}{192} y(25-1) = \frac{1}{8} y \quad ; \quad 0 < y < 4$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} y & ; \quad 0 < y < 4 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

- b) Para que las vv.aa. sean independientes, debe cumplir

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

sustituyendo

$$\frac{1}{96} xy = \left(\frac{1}{12} x \right) \left(\frac{1}{8} y \right)$$

$$\frac{1}{96} xy = \frac{1}{96} xy$$

por lo tanto, sí son variables aleatorias conjuntas estadísticamente independientes.

- c) La covarianza está definida por

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

por independencia, se tiene

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

Las variables aleatorias, no tienen asociación lineal.

6. Un antropólogo quiere estimar la estatura promedio de los hombres de cierta raza. Si se supone que la desviación estándar de la población es de 2.5 [cm] y se seleccionan al azar a 100 hombres. Calcular la probabilidad de que la diferencia entre la media de la muestra y la media verdadera de la población exceda de 0.5 [cm]

15 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa la estatura de los hombres.

$$X \sim \text{Normal}(\mu_X, \sigma_X^2 = (2.5)^2)$$

Sea X_i una muestra aleatoria de 100 hombres. $i = 1, 2, \dots, 100$

$$X_i \sim \text{Normal}(\mu_X, \sigma_X^2 = (2.5)^2) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, 100$$

La muestra es grande y se conoce la variancia de la población, entonces por el Teorema del Límite Central

$$\bar{X} \sim \text{Normal}\left(\mu_{\bar{X}} = \mu_X, \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

sustituyendo

$$\bar{X} \sim Normal\left(\mu_{\bar{X}} = \mu_X, \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(2.5)^2}{100}\right)$$

se pide calcular

$$P(|\bar{X} - \mu_X| > 0.5) = 1 - P(-0.5 < \bar{X} - \mu_X < 0.5) \approx 1 - P\left(\frac{-0.5}{\frac{2.5}{\sqrt{10}}} < \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} < \frac{0.5}{\frac{2.5}{\sqrt{10}}}\right) = 1 - P(-2 < Z < 2)$$

De tablas de la distribución acumulativa normal estándar:

$$1 - P(-2 < Z < 2) = 1 - (F_Z(Z = 2) - F_Z(Z = -2)) = 1 - (0.9772 - 0.0228) = 1 - 0.9544 = 0.0456$$

7. En la producción de herramientas de acero, se ha considerado ilustrar la relación entre la deformación (x) y la dureza Brinell (y).
- Obtener la ecuación de la recta de regresión.
 - Calcular el coeficiente de correlación.
 - La dureza cuando la deformación es de 25 [mm]

x [mm]	6	9	11	22	26	28	33	35
y $\left[\frac{kg}{mm^2}\right]$	68	67	65	44	40	37	34	32

Usar los cálculos siguientes

	X	Y	x^2	y^2	xy
Suma:	170	387	4496	20423	7012

15 Puntos

Resolución

- a) El ajuste de los datos a un modelo lineal de regresión por el criterio de mínimos cuadrados está dado por

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$$

donde

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

realizando los productos y las sumas, se tiene

	X	Y	x^2	y^2	xy
	6	68	36	4624	408
	9	67	81	4489	603
	11	65	121	4225	715
	22	44	484	1936	968
	26	40	676	1600	1040
	28	37	784	1369	1036
	33	34	1089	1156	1122
	35	32	1225	1024	1120
Suma:	170	387	4496	20423	7012

de donde

$$SS_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{n} = 4496 - \frac{(170)^2}{8} = 883.5$$

$$SS_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n} = 7012 - \frac{(170)(387)}{8} = -1211.75$$

sustituyendo

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{-1211.75}{883.5} = -1.372$$

para calcular los promedios, se sabe

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{8}(170) = 21.25$$

y

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{8}(387) = 48.375$$

sustituyendo

$$\hat{\beta}_0 = 48.375 - (-1.372)(21.25) = 77.53$$

por lo tanto el modelo lineal de regresión es

$$\hat{y} = 77.53 - 1.372x$$

- b) El coeficiente de correlación está definido por

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx} SS_{yy}}}$$

calculando

$$SS_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{n} = 20423 - \frac{(387)^2}{8} = 1701.875$$

por lo que el coeficiente de correlación es

$$r = \frac{-1211.75}{\sqrt{(883.5)(1701.875)}} = -0.988$$

- c) Si la deformación es de 25 [mm], entonces

$$\hat{y} = 77.53 - 1.372(25) = 43.23$$