UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2009-1
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS **DICIEMBRE 10 DE 2008**
NOMBRE____

1. Supóngase que un ingeniero toma una muestra aleatoria de 10 embarques recientemente enviados por camión de una compañía y registra la distancia en kilómetros y el tiempo de entrega, al mediodía más cercano, y a partir del momento en que el embarque estuvo listo para su transportación.

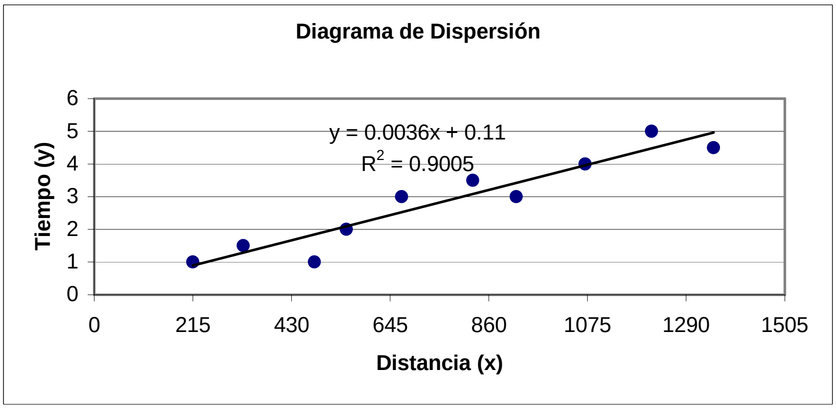
Distancia (x), [Km]	825	215	1070	550	480	920	1350	325	670	1215
Tiempo de entrega (y), [días]	3.5	1.0	4.0	2.0	1.0	3.0	4.5	1.5	3.0	5.0

a) Construir la gráfica de dispersión.
b) Estimar la recta de regresión.
c) Calcular el coeficiente de determinación e interpretar el resultado.

20 Puntos

Resolución

a) El diagrama de dispersión es:



La recta de regresión está dada por: $\hat{y} = \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_0$

donde:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

y

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

Con $n = 10$, se sabe que:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{10} x_i \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{10} y_i \quad , \quad SS_{xy} = \sum_{n=1}^{10} x_i\, y_i - \frac{\sum_{n=1}^{10} x_i \sum_{n=1}^{10} y_i}{n}$$

y $$SS_{xx} = \sum_{n=1}^{10} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{n=1}^{10} x_i\right)^2}{n}$$

sustituyendo en cada caso:

$$\bar{x} = \frac{7620}{10} = 762$$

$$\bar{y} = \frac{28.5}{10} = 2.85$$

$$SS_{xy} = 26370 - \frac{(7620)(28.5)}{10} = 4653$$

$$SS_{xx} = 7104300 - \frac{(7620)^2}{10} = 1297860$$

sustituyendo:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{4653}{1297860} = 0.0036$$

$$\hat{\beta}_0 = 2.85\text{-}(0.0036)\ (762) = 0.11$$

por lo tanto el ajuste a una recta está dado por:

$$\hat{y} = 0.0036x + 0.11$$

c) Se requiere $SS_{yy} = \sum_{n=1}^{10} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{n=1}^{10} y_i\right)^2}{n}$

sustituyendo:

$$SS_{yy} = 99.75 - \frac{(28.5)^2}{10} = 18.525$$

se sabe que:

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}} = \frac{4653}{\sqrt{(1297860)(18.525)}} = 0.9489$$

entonces:

$$r^2 = (0.9489)^2 = 0.9004$$

La tendencia lineal es muy buena.

2. Una fábrica de computadoras recibe circuitos provenientes de tres distintos fabricantes A_1, A_2 y A_3. El 50% del total se compra a A_1, mientras que a A_2 y A_3, se les compra un 25% a cada uno. El porcentaje de circuitos defectuosos para A_1, A_2 y A_3, es de 5, 10 y 12%, respectivamente. Si los circuitos se almacenan en la planta sin importar quien fue el proveedor.
   a) Determinar la probabilidad de que una computadora contenga un circuito defectuoso.
   b) Si un circuito no está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido vendido por el proveedor A_2?

15 Puntos

Resolución

Sean los eventos:

A_i : El circuito proviene del fabricante i ; $i = 1,\ 2,\ 3.$

D : El circuito está defectuoso.

a) Empleando el Teorema de Probabilidad Total:

$$P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2) + P(D \cap A_3)$$

$$P(D) = P(A_1)\,P(D \mid A_1) + P(A_2)\,P(D \mid A_2) + P(A_3)\,P(D \mid A_3)$$

$$P(D) = (0.5)(0.05) + (0.25)(0.1) + (0.25)(0.12)$$

$$P(D) = 0.08$$

Entonces la probabilidad de que no esté defectuoso es:

$$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.08 = 0.92$$

b) Del Teorema de Bayes y empleando el resultado del inciso anterior:

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{P(A_2 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$$

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{P(A_2)P(\overline{D} \mid A_2)}{P(\overline{D})}$$

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{P(A_2)P(1 - P(D \mid A_2))}{0.92}$$

$$P(A_2 \mid \overline{D}) = \frac{(0.25)(1 - 0.1)}{0.92} = 0.2446$$

3. El pH con el que se mide la acidez del agua, es importante en los estudios de lluvia ácida. Para determinado lago de cierta región de México, se llevan a cabo mediciones testigo de acidez para que se pueda notar cualquier cambio originado por la lluvia acida. El pH de las muestras de agua del lago es una variable aleatoria X, cuya función de densidad de probabilidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+8}{90} & ; \quad 2 < x \le 5 \\ \dfrac{9-x}{16} & ; \quad 5 < x < 9 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución que muestra el comportamiento acumulado $F_X(x)$.

b) Para evitar los valores altos de pH que causan problemas en la flora y fauna local, se propusieron ciertas acciones de control, ¿cuál es la probabilidad de que el pH sea menor de seis al aplicar dichas medidas?.

c) Calcular el promedio del pH en una muestra de agua.

20 Puntos

Resolución

a) La función de distribución que muestra el comportamiento acumulado, se define por:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

para el intervalo $2 < x \le 5$:

$$F_X(x)=\int_2^x \frac{2t+8}{90}\,dt=\frac{1}{90}\left(t^2+8t\right)\Big|_2^x$$

$$F_X(x)=\frac{1}{90}\left(x^2+8x\right)-\frac{1}{90}(4+16)=\frac{1}{90}\left[x^2+x-20\right] \qquad ; \qquad 2<x\le 5$$

para el intervalo $5<x<9$:

$$F_X(x)=\frac{1}{2}+\int_5^x \frac{9-t}{16}\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\left(9t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_5^x=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}\left(9x-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{16}\left(45-\frac{25}{2}\right)$$

$$F_X(x)=\frac{1}{2}+\frac{9}{16}x-\frac{1}{32}x^2-\frac{45}{16}+\frac{25}{32}=-\frac{1}{32}x^2+\frac{9}{16}x-\frac{49}{32}=\frac{1}{32}\left[-x^2+18x-49\right] \qquad ; \qquad 5<x<9$$

por lo tanto, la función de distribución está dada por:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x\le 2 \\ \frac{1}{90}\left[x^2+x-20\right] & ; \quad 2<x\le 5 \\ \frac{1}{32}\left[-x^2+18x-49\right] & ; \quad 5<x<9 \\ 1 & ; \quad x\ge 9 \end{cases}$$

b) Se pide calcular $P(X<6)$, sustituyendo en la función de distribución acumulativa:

$$P(X<6)=P(X\le 6)=F_X(6)=\frac{1}{32}\left[-6^2+18(6)-49\right]=\frac{23}{32}\approx 0.719$$

c) Para calcular el promedio, se debe usar la función de densidad dada y se define como:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$$

sustituyendo:

$$E(X)=\int_2^5 x\left(\frac{2x+8}{90}\right)dx+\int_5^9 x\left(\frac{9-x}{16}\right)dx$$

$$E(X)=\frac{1}{90}\int_2^5\left(2x^2+8x\right)dx+\frac{1}{16}\int_5^9\left(9x-x^2\right)dx$$

integrando:

$$E(X)=\frac{1}{90}\left(\frac{2}{3}x^3+4x^2\right)\Big|_2^5+\frac{1}{16}\left(\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_5^9$$

$$E(X)=\frac{1}{90}\left(\frac{2}{3}\left(5^3\right)+4\left(5^2\right)\right)-\frac{1}{90}\left(\frac{2}{3}\left(2^3\right)+4\left(2^2\right)\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{9}{2}\left(9^2\right)-\frac{1}{3}\left(9^3\right)\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{9}{2}\left(5^2\right)-\frac{1}{3}\left(5^3\right)\right)$$

$$E(X)=\frac{9}{5}+\frac{19}{6}=\frac{149}{30}\approx 4.967$$

4. Investigaciones y análisis recientes se centran en el número de enfermedades relacionadas con el organismo *Escherichia Coli*, que provoca la descomposición de los glóbulos rojos y hemorragias intestinales en sus victimas. En cierta ciudad han ocurrido brotes esporádicos de *E. Coli* a una tasa de 2.5 por 100,000 durante un periodo de dos años. Supóngase que la tasa se conserva.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que halla más de dos casos de *E. Coli* por 100,000 en dicha ciudad en un determinado año?
   b) ¿Alrededor de cuántos casos a lo sumo se relacionan con el 95% de los brotes de *E. Coli*?

15 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa el número de brotes de *Escherichia Coli* .

$$X \sim Binomial\left(n\ ,\ p\right)$$

sustituyendo:

$$X \sim Binomial\left(n = 100000\ ,\ p = \frac{2.5}{100000}\right)$$

o bien

$$X \sim Binomial\left(n = 100000\ ,\ p = 0.000025\right)$$

se sabe que, se puede hacer una aproximación por la distribución de Poisson, ya que, n es grande y p es pequeña, entonces: $\lambda = np = 2.5\ \left[\frac{brotes}{2\ años}\right]$, en un año, se tiene:

$$\lambda = np = 1.25\ \left[\frac{brotes}{año}\right]$$

por lo tanto:

$$\lambda \sim Poisson\left(1.25\ \left[\frac{brotes}{año}\right]\right)$$

a) La probabilidad de que halla más de dos casos de *Escherichia Coli* , es:

$$P\ (X >\ 2) = P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right) + P\left(X = 5\right) + \ldots +$$

$$P\ (X >\ 2) = 1 - P\left(X \le 2\right) = 1 - \left[\frac{(1.25)^0}{0!}e^{-1.25} + \frac{1.25}{1!}e^{-1.25} + \frac{(1.25)^2}{2!}e^{-1.25}\right]$$

$$P\ (X >\ 2) = 1 - P\left(X \le 2\right) = 1 - e^{-1.25}\left[\frac{97}{32}\right] \approx 0.1315$$

b) Para determinar el valor de x, de tal forma que $P\ (X \le\ x) = 0.95$, se tiene:

$$X \sim Poisson\left(\lambda = 1.25\ \left[\frac{brotes}{año}\right]\right)$$

Utilizando el comportamiento acumulado:

x	$P\ (X \le\ x)$
0	$P\ (X =\ 0) = \frac{(1.25)^0}{0!}e^{-1.25} \approx 0.2865$
1	$P\ (X \le\ 1) = \frac{(1.25)^0}{0!}e^{-1.25} + \frac{(1.25)^1}{1!}e^{-1.25} \approx 0.6446$
2	$P\ (X \le\ 2) = \frac{(1.25)^0}{0!}e^{-1.25} + \frac{(1.25)^1}{1!}e^{-1.25} + \frac{(1.25)^2}{2!}e^{-1.25} \approx 0.8685$
3	$P\ (X \le\ 3) = \frac{(1.25)^0}{0!}e^{-1.25} + \frac{1.25}{1!}e^{-1.25} + \frac{(1.25)^2}{2!}e^{-1.25} + \frac{(1.25)^3}{3!}e^{-1.25} \approx 0.9617$

Por lo tanto serían a lo más tres casos para tener la probabilidad pedida.

5. Supóngase que Y_1, Y_2 y Y_3 son variables aleatorias con $\left(\mu_1 = 1,\ \sigma_1^2 = 2\right)$, $\left(\mu_2 = 3,\ \sigma_2^2 = 1\right)$, $\left(\mu_3 = 0,\ \sigma_3^2 = 4\right)$, $Cov\left(Y_1,\ Y_2\right) = -1$, $Cov\left(Y_1,\ Y_3\right) = 2$ y $Cov\left(Y_2,\ Y_3\right) = 1$. Calcular la media y la variancia de $T = 2Y_1 + Y_2 - 3Y_3$.

15 Puntos

Resolución

Para obtener la media de la variable aleatoria T , se sabe que es un operador lineal, entonces:

$$E\left(T\right) = E\left(2Y_1 + Y_2 - 3Y_3\right) = 2E\left(Y_1\right) + E\left(Y_2\right) - 3E\left(Y_3\right)$$

sustituyendo:

$$E\left(T\right) = 2\left(1\right) + 3 - 3\left(0\right) = 5$$

La variancia de la variable aleatoria T está dada por:

$$Var\left(T\right) = Var\left(2Y_1 + Y_2 - 3Y_3\right)$$

$$Var\left(T\right) = 4Var\left(Y_1\right) + Var\left(Y_2\right) + 9Var\left(Y_3\right) + 2\left(2\right)\left(1\right)Cov\left(Y_1, Y_2\right) + 2\left(2\right)\left(-3\right)Cov\left(Y_1, Y_3\right) + 2\left(1\right)\left(-3\right)Cov\left(Y_2, Y_3\right)$$

$$Var\left(T\right) = 4\left(2\right) + 1 + 9\left(4\right) + 2\left(2\right)\left(1\right)\left(-1\right) + 2\left(2\right)\left(-3\right)\left(2\right) + 2\left(1\right)\left(-3\right)\left(1\right)$$

$$Var\left(T\right) = 11$$

6. El tiempo en el que un cajero de un banco con servicio en el automóvil atiende a un cliente, es una variable aleatoria con distribución aproximadamente normal, con media 3.2 minutos y desviación estándar 1.6 minutos. Si se observa una muestra aleatoria de 64 clientes, calcular la probabilidad de que su tiempo medio en el cajero sea
   a) más de 3.5 minutos; y
   b) al menos 3.2 minutos pero menos de 3.4.

15 Puntos

Resolución

Sea Y la v.a. que representa el tiempo que tarda un cajero de un banco en brindar servicio en automóvil a un cliente.

$$Y \sim Normal\left(\mu_Y = 3.2 \text{ [min]}\ ,\ \sigma_Y^2 = \left(1.6\right)^2 \text{ [min]}^2\right)$$

Sea $Y_i\ ;\ i = 1, 2,\ \ldots\ , 64$ la muestra aleatoria tomada de una población normal, por el teorema del límite central, se tiene:

$$Y_i \sim Normal\left(\mu_{Y_i} = 3.2\ ,\ \sigma_{Y_i}^2 = 1.6^2\right) \quad ; \quad \text{i=1,2,...,64}$$

la variable aleatoria para los 64 clientes de un banco en brindar servicio en automóvil:

$$\overline{Y} = \frac{1}{64}\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{64}\right) = \frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64} Y_i$$

entonces:

$$\overline{Y} \sim Normal\left(\mu_{\overline{Y}} = \mu_Y = 3.2\ ,\ \sigma_{\overline{Y}}^2 = \frac{\sigma_Y^2}{64} = \frac{\left(1.6\right)^2}{64}\right)$$

a) Del enunciado se pide determinar $P\left(\overline{Y} > 3.5\right)$, entonces:

$$P\left(\overline{Y} > 3.5\right) \approx P\left(Z > \frac{3.5 - 3.2}{\frac{1.6}{\sqrt{64}}}\right) = P\left(Z > 1.5\right)$$

usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$$P\left(Z > 1.5\right) = 1 - F_Z(Z = 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

b) La probabilidad de que la media muestral esté en $P\left(3.2 \le \overline{Y} \le 3.4\right) = P\left(3.2 < \overline{Y} < 3.4\right)$, entonces:

$$P\left(3.2 < \overline{Y} < 3.4\right) \approx P\left(\frac{3.2-3.2}{\frac{1.6}{\sqrt{64}}} < Z < \frac{3.4-3.2}{\frac{1.6}{\sqrt{64}}}\right) = P\left(0 < Z < 1\right)$$

usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$$P\left(0 < Z < 1\right) = F_Z\left(Z = 1\right) - F_Z\left(Z = 0\right) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413$$

z	**0**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641