UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2009-1 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS **DICIEMBRE 3 DE 2008**

NOMBRE_____

1. Los alumnos de la carrera de ingeniería industrial de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, realizaron un estudio de las cotizaciones del trigo con el fin de emprender un negocio de distribución. Los datos (en miles de pesos) de la muestra, se presentan en la tabla de distribución de frecuencias siguiente.

Clase	Fronteras de Clase		Marcas de Clase	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia Acumulada	Frecuencia Acumulada Relativa		
	L_i	L_S	x_i	f_i	f_i^*	F_i	F_i^*	$x_i f_i$	$(x_i-\bar{x})^2 f_i$
1	97.25	120.95	109.1	18	0.300	18	0.300	1963.8	31555.744
2	120.95	144.65	132.8	21	0.350	39	0.650	2788.8	6933.127
3	144.65	168.35	156.5	6	0.100	45	0.750	939.0	183.485
4	168.35	192.05	180.2	2	0.033	47	0.783	360.4	1708.786
5	192.05	215.75	203.9	2	0.033	49	0.817	407.8	5603.170
6	215.75	239.45	227.6	8	0.133	57	0.950	1820.8	46977.255
7	239.45	263.15	251.3	2	0.033	59	0.983	502.6	20132.218
8	263.15	286.85	275.0	1	0.017	60	1.000	275.0	15383.441
				60	1.000			9058.2	128477.226

a) Calcular la media, la mediana y la moda de la muestra.
b) Determinar la variancia muestral y el coeficiente de variación.
c) Dibujar el histograma, el polígono de frecuencias y la ojiva.

20 Puntos

Resolución

a) La media de los datos está dada por: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i f_i = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i^*$

sustituyendo: $\bar{x} = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{8} x_i f_i = \frac{1}{60}\left[1963.8 + \ldots + 275.0\right] = 150.97$

La mediana es el valor de x que divide en dos partes a la muestra dada, entonces:

Ls	Fi*
120.95	0.3
$\tilde{x}$	0.5
144.65	0.65

Realizando una interpolación:

$$m = \frac{0.65-0.3}{144.65-120.95} = \frac{0.35}{23.7} = 0.015$$

con la ecuación de una recta dado un punto y la pendiente, se tiene:

$$y - 0.65 = 0.015\left(x - 144.65\right)$$

con $y = 0.5$, sustituyendo:

$$0.5 - 0.30 = 0.015\left(\tilde{x} - 120.95\right)$$

$$\tilde{x} = \frac{0.2}{0.015} + 120.95$$

$$\tilde{x} = 134.283$$

La moda es el valor de la marca de clase con mayor frecuencia:

$$x_{mo} = 132.8$$

De otra forma, usando la fórmula para datos agrupados:

$$x_{mo} = L_{Mo\,\text{inf}} + \left[\frac{a}{a+b}\right] c_{Mo}$$

donde:

$a = f_{Mo} - f_{Mo-1}$, $b = f_{Mo} - f_{Mo+1}$

f_{Mo} *: Es la frecuencia absoluta de la clase que contiene a la moda*

c_{Mo} *: Es la longitud de la clase que contiene a la moda*

L_{Moinf} *: Es el límite inferior de la clase que contiene a la moda*

sustituyendo:

$$x_{mo} = 120.95 + \left[\frac{3}{3+15}\right](23.7)$$

realizando las operaciones:

$$x_{mo} = 124.90$$

b) La variancia muestral está definida por: $s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 f_i$

sustituyendo la información dada:

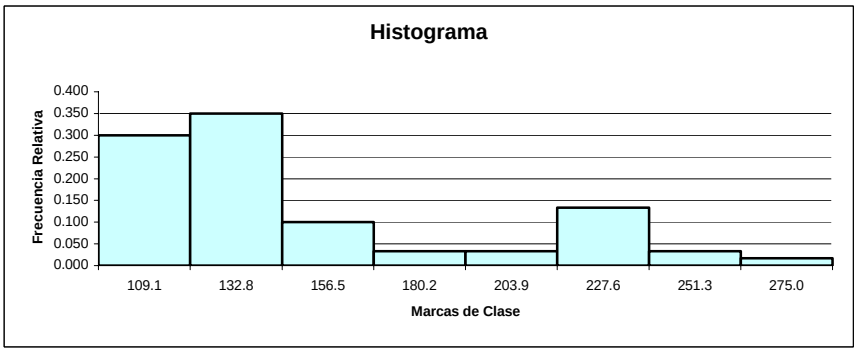
$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{59}\left[31555.744 + \ldots + 15383.441\right]$$

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{59}\left[128477.226\right] = 2177.580$$

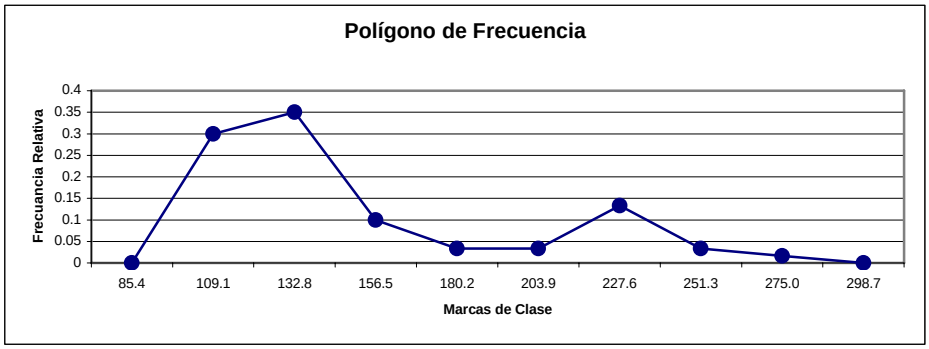
El coeficiente de variación se define por: $C.V. = \frac{S_{n-1}}{\overline{x}}$

sustituyendo: $C.V. = \frac{\sqrt{2177.580}}{150.970} = \frac{46.665}{150.970} = 0.309$

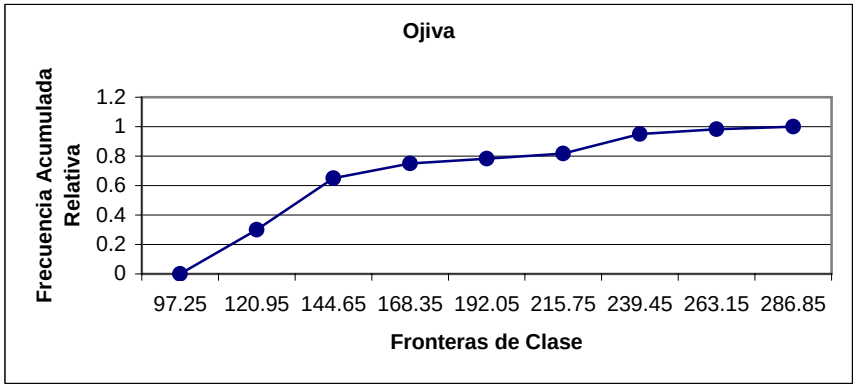
c) El histograma es:



El polígono de frecuencias es:



La ojiva es:



2. Una prueba diagnóstica para el cáncer uterino tiene un coeficiente falso-positivo de 0.05 y falso-negativo de 0.1. Una mujer con una probabilidad pre-prueba de padecer la enfermedad de 0.15 tiene un resultado negativo con igual probabilidad. Calcular la probabilidad de que no esté enferma. El coeficiente falso-positivo se refiere a: el resultado es positivo, dado que la mujer no tiene la enfermedad y, el coeficiente falso-negativo se refiere a: el resultado es negativo, dado que la mujer tiene la enfermedad.

15 Puntos

Resolución

Sea E el evento que representa que la mujer tenga la enfermedad.

Sea A el evento que representa el resultado de la prueba es positivo.

Del enunciado se tiene: $P(E) = 0.15$, $P(\overline{E}) = 0.85$, $P(A|\overline{E}) = 0.05$ y $P(\overline{A}|E) = 0.10$

Se quiere calcular: $P(\overline{E}|\overline{A})$

Por el Teorema de Bayes:

$$P(\overline{E}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{E})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{E})P(\overline{A}|\overline{E})}{P(E)P(\overline{A}|E) + P(\overline{E})P(\overline{A}|\overline{E})}$$

sustituyendo:

$$P(\overline{E}|\overline{A}) = \frac{(0.85)(0.95)}{(0.15)(0.10) + (0.85)(0.95)} = \frac{0.8075}{0.8225} = 0.9818$$

3. Por saturación de vuelos, algunas líneas aéreas venden más pasajes que los disponibles en un vuelo. Una compañía ha vendido 205 boletos que corresponden a un avión con capacidad de 200 asientos.
Sea X la variable aleatoria que representa el número de pasajeros que tramita su pase de abordar en el aeropuerto. La distribución de probabilidad está dada por

x	198	199	200	201	202	203	204	205
$f_X(x)$	0.05	0.09	0.15	0.20	0.23	0.17	0.09	0.02

a) Determinar la probabilidad de que todos los pasajeros tengan asiento.
b) Calcular la probabilidad de que alguno de los pasajeros se quede sin asiento.
c) Determinar el número promedio de pasajeros que llegan a tomar el vuelo.
Supóngase que la compañía aérea recibe 250 euros por cada boleto que vende, pero que tiene que devolver el precio del boleto y además, pagar una multa de 1000 euros a cada pasajero que no pueda tomar el avión y que adquirió su boleto. Calcular la cantidad esperada de dinero que ganará la compañía.

20 Puntos

Resolución

a) Se pide calcular $P(X \leq 200)$, entonces:

$$P(X \leq 200) = P(X = 198) + P(X = 199) + P(X = 200)$$

$$P(X \leq 200) = 0.05 + 0.09 + 0.15 = 0.29$$

b) Se pide determinar $P(X > 200)$, entonces:

$$P(X > 200) = P(X = 201) + P(X = 202) + P(X = 203) + P(X = 204) + P(X = 205)$$

$$P(X > 200) = 0.20 + 0.23 + 0.17 + 0.09 + 0.02 = 0.71$$

también se puede obtener como:

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - 0.29 = 0.71$$

c) Calculando el valor esperado, $E(X)$:

$$E(X) = \sum_{\forall x} x\, f_X(x)$$

sustituyendo:

$$\mathrm{E(X)} = 198(0.05) + 199(0.09) + 200(0.15) + 201(0.2) + 202(0.23) + 203(0.17) + 204(0.09) + 205(0.02)$$

$$\mathrm{E(X)} = 201.44$$

se espera que lleguen 202 personas. Entonces para calcular la cantidad esperada de dinero:

$U = I - E$

El modelo es:

$$U = 250X - 1250(X - 200)$$

Aplicando valor esperado a la utilidad:

$$E(U) = E(250X - 1250(X - 200)) = 250E(X) - 1250E(X - 200)$$

se tiene:

$$E(U) = 250E(X) - 1250(E(X) - 200) = 250(201.44) - 1250(201.44 - 200)$$

$$E(U) = 50360 - 1800$$

$$E(U) = 48560 \ \ Euros$$

4. La aceptación de un tubo capilar para un congelador se encuentra midiendo la presión que ejerce (en libra por pulgada cuadrada, [psi]) en los extremos del mismo. Información obtenida anteriormente en un proceso de manufactura de tubos capilares hace suponer que estas presiones están distribuidas normalmente, con media de 130 [psi] y desviación estándar de cuatro [psi].
a) Si no se pueden aceptar presiones por debajo de 121.5 [psi], ¿cuál es el porcentaje de tubos rechazados?

b) Si no se quiere rechazar más del 10% de los tubos con presiones bajas, cuál es la presión mínima que debe tener cualquier tubo para ser aceptado?

15 Puntos

Resolución

a) Sea X la v.a. que representa la presión que ejerce un tubo capilar en los extremos.

$X \sim Normal\left(\mu_X = 130\ [psi]\ ,\ \sigma_X = 4\ [psi]\right)$

Se pide calcular la probabilidad de que la presión $P\ (\ X < 121.5)$ que da la probabilidad de que un tubo sea rechazado y usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$$P\ (\ X < 121.5\ ) \approx P\left(\ Z < \frac{121.5-130}{4}\right) = P\left(Z < -2.13\right) = 0.0166$$

entonces el porcentaje de tubos que serán rechazados es: 1.67%

b) Se pide determinar $P\ (\ X < x) = 0.10$ que representa que no se requiera rechazar más de 10% de los tubos con presiones bajas, entonces:

$$P\ (\ X < x\ ) \approx P\left(\ Z < \frac{x-130}{4}\right) = P\left(Z < z_0\right) = 0.10$$

usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar, con 0.10 el más próximo es:

$$z_0 = \frac{x-130}{4}$$

por lo que:

$$-1.28 = \frac{x-130}{4}$$

despejando:

$x = 124.88\ [psi]$

que sería la presión mínima que debe tener un tubo para ser aceptado.

5. Sean las variables aleatorias conjuntas X y Y con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) \ = \ \begin{cases} 4\,xy & ;\quad 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & ;\qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener las funciones de densidad marginal para X y Y.

b) ¿Son X y Y variables aleatorias conjuntas independientes?

c) Calcular el valor esperado de $Z = X^2 + Y^2$.

15 Puntos

Resolución

a) Las funciones marginales están definidas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dy \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ dx$$

sustituyendo se tiene:

$$f_X(x) = \int_0^1 4xy\ dy \ = \ \left(2xy^2\right)\Big|_0^1 \ = \ 2x \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

por simetría:

$f_Y(y) = \ 2y \quad ; \quad 0 \le y \le 1$

b) Para que las vv.aa. sean independientes, debe cumplir:

$$f_{XY}(x,y) \ = \ f_X\left(x\right) f_Y\left(y\right)$$

sustituyendo:

$4xy = (2x)(2y)$

$4xy = 4xy$

por lo tanto, sí son variables aleatorias conjuntas estadísticamente independientes.

c) El valor esperado de $Z = X^2 + Y^2$ está dado por:

$E(Z) = E(X^2 + Y^2) = E(X^2) + E(Y^2)$

entonces:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx$$

sustituyendo:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 (2x)\, dx = 2\int_0^1 x^3\, dx = \frac{2}{4}x^4 \Big]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Por simetría:

$$E(Y^2) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto el valor esperado es: $E(Z) = E(X^2) + E(Y^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

6. Considérese una enlatadora que produce latas de ocho [onzas] de maíz procesado. Los ingenieros de control de calidad han determinado que el proceso está funcionando correctamente cuando la variación verdadera σ^2 de la cantidad de llenado por lata es de menos de 0.0025. Se selecciona una muestra aleatoria de 10 latas de la producción del día y se registra la cantidad de llenado (en onzas) para cada una. Lo que interesa es la variancia de la muestra, S^2. Si en verdad $\sigma^2 = 0.001$, calcular la probabilidad de que S^2 será mayor que 0.0025. Supóngase que las cantidades de llenado tienen una distribución normal.

15 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa la cantidad de maíz procesado que debe contener una lata de ocho [onzas].

$X \sim Normal(\mu_X\ ,\ \sigma_X^2 = 0.001)$

Sea X_i una muestra aleatorias de 10 latas de la producción. $i = 1, 2, ..., 10$

$X_i \sim Normal(\mu_X\ ,\ \sigma_X^2 = 0.001)$; i=1,2,...,10

se pide calcular:

$P\ (\ S_{n-1}^2\ >\ 0.0025\ )$

entonces:

$$P\ (S_{n-1}^2\ >\ 0.0025) \approx P\left(\frac{S_{n-1}^2(n-1)}{\sigma^2}\ >\ \frac{(0.0025)(9)}{0.001}\right) = P\left(X_{(9)}^2\ >\ 22.5\right) = 0.00742$$

por lo que es poco probable de que exceda la cantidad de llenado.

De otra forma, usando las tablas de la distribución Ji-cuadrada, se tiene que con nueve grados de libertad y 22.5, realizando una interpolación:

21.666	0.01
22.5	y
23.589	0.005

$$m = \frac{0.01 - 0.005}{21.666 - 23.589} = \frac{0.005}{-1.923} = -0.0026$$

de la ecuación de la recta punto-pendiente:

$$y - 0.01 = -0.0026\left(x - 21.666\right)$$

con $x = 22.5$

$$y = -0.0026\left(22.5 - 21.666\right) + 0.01$$

$$y = 0.0078$$

donde se observa que es poco probable que se exceda la cantidad de llenado.

De otra forma de la tabla de la distribución Ji cuadrada, con nueve grados de libertad y $x = 22.5$, es:

$$0.005 < P\left(\mathrm{X}^2_{(9)} > 22.5\right) < 0.01$$