UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2008-2 **TIPO 2**
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS **JUNIO 5 DE 2008**
NOMBRE:____

1. El puntaje de Apgar se usa para evaluar reflejos y respuestas de recién nacidos. A cada bebé un profesional de la medicina le asigna un puntaje y los valores posibles son enteros entre cero y diez. Se toma una muestra de mil bebés nacidos en cierta región y el número con cada puntaje es el siguiente:

Puntaje	Número de bebés
0	1
1	3
2	2
3	4
4	25
5	35
6	198
7	367
8	216
9	131
10	18

a) Obtener la media de la muestra de los puntajes de Apgar.
b) Obtener el primer cuartil de la muestra de los puntajes de Apgar
c) Construir el polígono de frecuencias.
20 Puntos
Resolución
a) La media está dada por:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} x_i f_i = \sum_{i=1}^{11} x_i f_i^*$$

sustituyendo y realizando operaciones:

$$\bar{x} = \frac{1}{1000}\left[(0)(1)+(1)(3)+(2)(2)+\ldots+(10)(18)\right] = \frac{7138}{1000} = 7.138$$

b) Para el primer cuartil Q_1, se usan las fronteras y la frecuencia acumulada relativa se tiene:

F_i	F_i^*
5.5	$\frac{70}{1000}$
Q_1	$\frac{250}{1000}$
6.5	$\frac{268}{1000}$

realizando una interpolación:

$$m=\frac{\frac{268}{1000}-\frac{70}{1000}}{6.5-5.5}=\frac{198}{1000}=\frac{99}{500}=0.198$$

sustituyendo en la ecuación de la recta dados dos puntos:

$$y-\frac{70}{1000}=\frac{99}{500}(x-5.5)$$

con $y=\frac{250}{1000}=\frac{1}{4}$ y $x=Q_1$

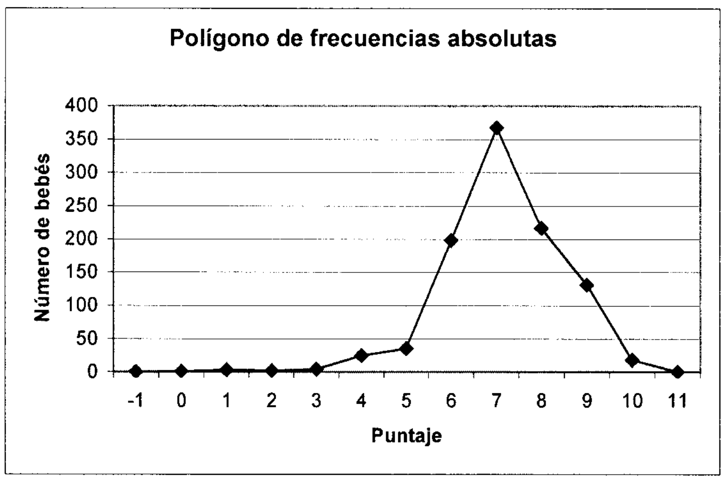
$$\frac{250}{1000}-\frac{70}{1000}=\frac{99}{500}(Q_1-5.5)$$

despejando:

$$Q_1=\frac{180(500)}{1000(99)}+5.5$$

$$Q_1=\frac{10}{11}+5.5=\frac{141}{22}=6.409$$

c) Se pide el polígono de frecuencias, en este caso se tiene:



2. De 300 estudiantes de ciencias económicas, 100 cursan estadística y 80 cursan historia económica. Estas cifras incluyen 30 estudiantes que cursan ambas materias.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no curse ninguna de estas materias?
   b) ¿Qué probabilidad hay de que al elegir un estudiante curse historia económica, dado que cursa estadística?

15 Puntos

Resolución

Sea E el evento que representa a los alumnos que cursan estadística.

Sea H el evento que representan a los alumnos que cursan historia económica.

Del enunciado se sabe que: $n=300$, $n(E)=100$, $n(H)=80$ y $n(E\cap H)=30$

a) $P(\text{no curse ninguna de estas materias})=P\left(\overline{E\cup H}\right)$

esto es:

$$P\left(\overline{E \cup H}\right) = 1 - P(E \cup H) = P\left(\overline{E} \cap \overline{H}\right) =$$

$$= 1 - \left[P(E) + P(H) - P(E \cap H)\right] = 1 - \left[\frac{100}{300} + \frac{80}{300} - \frac{30}{300}\right] =$$

$$= 1 - \frac{150}{300} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 0.5$$

b) Se pide calcular $P(H|E)$ entonces:

$$P(H|E) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{\frac{30}{300}}{\frac{100}{300}} = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0.3$$

3. Supóngase que la duración en minutos de una llamada de negocios es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidad está determinada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} & ; \quad x \geq 0 \\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

a) Obtener el valor esperado de la función.
b) Calcular la variancia de la función.

15 Puntos

Resolución

La variable aleatoria X es continua con distribución exponencial.

a) $E(X) = \int_0^{\infty} \frac{x}{4} e^{-\frac{x}{4}}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-x e^{-\frac{x}{4}} - 4\, e^{-\frac{x}{4}} \right]_0^b = 4$

De otra forma, $X \sim Exponencial(\lambda)$ del enunciado: $\lambda = \frac{1}{4}$

entonces: $X \sim Exponencial\left(\lambda = \frac{1}{4}\right)$

por lo que se tiene: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1/4} = 4$ se verifica.

b) $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x}{4}}\, dx = \lim_{b \to \infty} \left[-x^2 e^{-\frac{x}{4}} - 8\, x\, e^{-\frac{x}{4}} - 32\, e^{-\frac{x}{4}} \right]_0^b = 32$$

sustituyendo:

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = 34 - (4)^2 = 16$$

De otra forma, $X \sim Exponencial\left(\lambda = \frac{1}{4}\right)$ entonces:

por lo que se tiene: $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\left(1/4\right)^2} = 16$ se verifica.

4. Una fábrica produce circuitos con 2.5% de defectuosos. Si se toma una muestra de 200 circuitos, ¿cuál es la probabilidad de encontrar 3 o más defectuosos?

10 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa el número de circuitos defectuosos, si se selecciona una muestra con 200 de ellos.

$X \sim Binomial\left(n = 200 \ , \ p = 0.025\right)$

se quiere calcular:

$P\left(X \geq 3\right) = P\left(X = 3\right) + P\left(X = 4\right) + \ldots + P\left(X = 200\right)$

que es igual a:

$P\left(X \geq 3\right) = 1 - \left[P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right)\right]$

$$P\left(X \geq 3\right) = 1 - \left[\binom{200}{0}(0.025)^0(0.975)^{200} + \binom{200}{1}(0.025)^1(0.975)^{199} + \binom{200}{2}(0.025)^2(0.975)^{198}\right]$$

realizando las operaciones:

$P\left(X \geq 3\right) \approx 0.878$

Otra forma, es decir, aproximando con la distribución normal:

$X \sim Normal\left(\mu_X = np = 5 \ , \ \sigma_X^2 = npq = 4.875\right)$

se quiere calcular:

$$P\left(X \geq 3\right) \approx P\left(Z \geq \frac{X - \mu_X - 0.5}{\sqrt{\sigma_X^2}}\right) = P\left(Z \geq \frac{3 - 5 - 0.5}{\sqrt{4.875}}\right) = P\left(Z \geq -1.13\right)$$

usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$P\left(Z \geq -1.13\right) = 1 - F_Z\left(-1.13\right) = 1 - 0.1292 = 0.8708$

5. Considere la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X y Y

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x - y}{9} & ; \quad 1 < x < 3 \ , \ 1 < y < 2 \\ 0 & ; \quad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

a) Obtener las distribuciones marginales de X y Y .
b) Determinar si son independientes X y Y.
c) Obtener $P(X > 2)$.

15 Puntos

Resolución

a) $$f_X(x) = \int_1^2 \left(\frac{3x - y}{9}\right) dy = \frac{3xy - y^2/2}{9}\Bigg|_1^2 = \frac{x}{3} - \frac{1}{6} \quad ; \quad 1<x<3$$

$$f_Y(y) = \int_1^3 \left(\frac{3x - y}{9}\right) dx = \frac{1}{9}\left(\frac{3x^2}{2} - xy\right)\Bigg|_1^3 = \frac{4}{3} - \frac{2y}{9} \quad ; \quad 1<y<2$$

b) $$f_X(x) f_Y(y) = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{4}{3} - \frac{2y}{9}\right) \neq \frac{3x - y}{9}$$

Por lo tanto X y Y no son independientes.

c)

$$P(X>2)=\int_2^3\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)dx=\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x}{6}\right)\Bigg|_2^3=\left(\frac{9}{6}-\frac{3}{6}\right)-\left(\frac{4}{6}-\frac{2}{6}\right)=\frac{6}{6}-\frac{2}{6}=$$

$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

6. Se indica la acidez de suelos por una medida llamada pH, que puede variar de 0 (alta acidez) a 14 (baja acidez). Un experto en edafología desea estimar el pH promedio de un campo de gran tamaño para lo cual selecciona al azar n muestras de suelo y mide el pH en cada muestra. Aunque no se conoce la desviación estándar de la población de las mediciones del pH, la experiencia indica que la mayoría de los suelos tienen un valor de 6.5 de pH. Si el científico selecciona 40 muestras, encontrar la probabilidad aproximada de que la media de la muestra de las 40 mediciones del pH se desvíe a lo más en 0.2 unidades de la verdadera media de pH del campo.

15 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa la acidez de los suelos.

$$X \sim Normal\left(\mu_X\ ,\ \sigma_X\right)$$

por lo que:

$$\overline{X} \sim Normal\left(\mu_{\overline{X}}=\mu_X\ ,\ \sigma^2_{\overline{X}}=\frac{\sigma^2_X}{n}\right)$$

esto es:

$$\overline{X} \sim Normal\left(\mu_X=\mu_{\overline{X}}\ ,\ \sigma^2_{\overline{X}}=\frac{(6.5)^2}{40}\right)$$

entonces:

$$P\left(\mu_X-0.2<\overline{X}<\mu_X+0.2\right)\approx P\left(\frac{\mu_X-0.2-\mu_X}{\frac{6.5}{\sqrt{40}}}<Z<\frac{\mu_X+0.2-\mu_X}{\frac{6.5}{\sqrt{40}}}\right)=$$

$$=P\left(\frac{-0.2\sqrt{40}}{6.5}<Z<\frac{0.2\sqrt{40}}{6.5}\right)$$

operando y usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$$P\left(\frac{-1.26}{6.5}<Z<\frac{1.26}{6.5}\right)=P\left(-0.19<Z<0.19\right)=F_Z\left(0.19\right)-F_Z\left(-0.19\right)=$$

$$=0.5753-0.4247=0.1506$$