UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2008-2
DURACIÓN MÁXIMA 2.5 HORAS
NOMBRE____

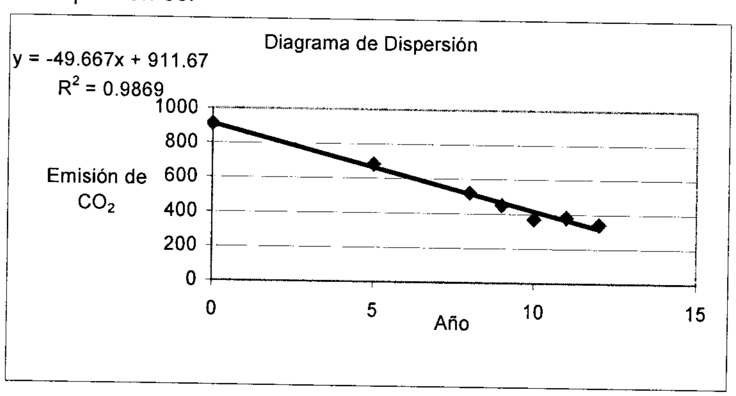
TIPO 1
JUNIO 5 DE 2008

1. Los datos siguientes corresponden a la emisión de dióxido de carbono (CO_2) de calderas alimentadas por carbón (en unidades de 1000 ton) durante los años 1995 - 2007. La variable independiente (el año) se estandarizó para obtener la tabla siguiente:

Año	0	5	8	9	10	11	12
Emisión de CO_2	910	680	520	450	370	380	340

a) Estimar la recta de regresión.
b) ¿Existe una tendencia lineal significativa en las emisiones de CO_2 durante ese periodo? Justificar su respuesta.
c) ¿Sería aconsejable usar la recta de regresión estimada para calcular la emisión promedio de CO_2 de las calderas alimentadas con carbón en el año 2030? Justificar la respuesta.
20 Puntos
Resolución

a) El diagrama de dispersión es:



La recta de regresión está dada por: $\hat{y} = \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_0$

donde: $\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ y $\hat{\beta}_1 = \dfrac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$

se sabe que:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{7} x_i \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{7} y_i \quad , \quad SS_{xy} = \sum_{n=1}^{7} x_i y_i - \frac{\sum_{n=1}^{7} x_i \sum_{n=1}^{7} y_i}{n}$$

$$\text{y} \quad SS_{xx} = \sum_{n=1}^{7} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{n=1}^{7} x_i\right)^2}{n}$$

sustituyendo en cada caso:

$$\bar{x} = \frac{55}{7} = 7.857$$

$$\bar{y} = \frac{3650}{7} = 521.428$$

$$SS_{xy} = 23570 - \frac{200750}{7} = -\frac{35760}{7} = -5108.571$$

$$SS_{xx} = 535 - \frac{3025}{7} = \frac{720}{7} = 102.857$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{-\frac{35760}{7}}{\frac{720}{7}} = -\frac{35760}{720} = -\frac{149}{3} = -49.667$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{3650}{7} + \frac{149}{3}\left(\frac{55}{7}\right) = \frac{2735}{3} = 911.667$$

por lo tanto el ajuste está dado por:

$$\hat{y} = 911.667 - 49.667\,x$$

b) Se requiere $SS_{yy} = \sum_{n=1}^{7} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{n=1}^{7} y_i\right)^2}{n}$

sustituyendo: $SS_{yy} = 2160300 - \frac{(3650)^2}{7} = 2160300 - \frac{13322500}{7} = \frac{1799600}{7} = 257085.714$

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}} = \frac{-5108.57}{\sqrt{102.857(257085.714)}} = -\frac{5108.57}{5142.282} - 0.993$$

$$r^2 = (-0.993)^2 = 0.987$$

La tendencia lineal es muy buena.

c) No, porque el año 2030 está muy alejado de la información que se tiene.

2. Una fundidora produce piezas de hierro fundido para uso en las transmisiones automáticas de camiones. Son dos las dimensiones cruciales de dicha pieza, A y B. Supóngase que si la pieza cumple con la especificación de la dimensión A, existe una probabilidad de 0.98 de que también cumpla con la dimensión B. Además, existe 0.95 de probabilidad de que cumpla con la especificación de la dimensión A y 0.97 de que lo haga con la dimensión B. Se selecciona aleatoriamente e inspecciona una unidad de dicha pieza. ¿Cuál es la probabilidad de que cumpla con las especificaciones de ambas dimensiones?

15 Puntos

Resolución

Sea A el evento que representa que la pieza cumple con las especificaciones de la dimensión A.

Sea B el evento que representa que la pieza cumple con las especificaciones de la dimensión B.

Del enunciado se tiene: $P(A) = 0.95$, $P(B) = 0.97$ y $P(B|A) = 0.98$

Se quiere calcular: $P(A \cap B)$

para lo cual se sabe:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

se escribe como:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

sustituyendo:

$$P(A \cap B) = (0.95)(0.98) = 0.931$$

3. Sea

$$f_X(x) = \begin{cases} A\,x & ; \quad 0 \le x \le 4 \\ A\,(8-x) & ; \quad 4 \le x \le 8 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de A para que $f_X(x)$ sea una función de densidad;

b) Determinar la función de distribución acumulativa $F_X(x)$; y

c) Calcular $P(2 < X < 6)$.

15 Puntos
Resolución

a) Se debe cumplir la propiedad: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$\int_0^4 A\,x\,dx + \int_4^8 A(8-x)\,dx = 1$$

$$\left.\frac{A}{2}x^2\right|_0^4 + \left. A\left(8x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_4^8 = 1$$

$$\frac{1}{2}(16) + 8(4) - \frac{1}{2}(64-16) = \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{2}(16) + 8(4) - \frac{1}{2}(64-16) = \frac{1}{A}$$

$$8 + 32 - 24 = \frac{1}{A}$$

$$16 = \frac{1}{\mathrm{A}} \quad \therefore \quad \mathrm{A} = \frac{1}{16}$$

b) Se quiere determinar: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f_X}(t)\,\mathrm{dt}$

Sustituyendo para: $0 \le x \le 4$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{16}t\,dt = \left.\frac{1}{16}\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{32}x^2$$

dado que el comportamiento es acumulado, en: $4 \le x \le 8$

$$F_X(x) = \frac{16}{32} + \int_4^x \frac{1}{16}(8-t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left.\left(8t - \frac{1}{2}t^2\right)\right]_4^x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{16}\left[8x - 32 - \frac{1}{2}x^2 + 8\right] = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - 2 - \frac{x^2}{32} + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2} - 1$$

por lo tanto la función de distribución acumulativa, es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{32} & ; \quad 0 \le x \le 4 \\ -\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{x}{2} - 1 & ; \quad 4 \le x \le 8 \\ 1 & ; \quad x > 8 \end{cases}$$

c) Se pide calcular $P\ (\ 2\ <\ X\ <\ 6\ )$, entonces sustituyendo en $F_X(x)$ se tiene:

$$P\ (\ 2\ <\ X\ <\ 6\ ) = F_X(6) - F_X(2) = -\frac{6^2}{32} + \frac{6}{2} - 1 - \frac{2^2}{32} = \frac{3}{4} = 0.75$$

4. Se tienen registros históricos de los gastos semanales de mantenimiento de los cuales ciertas reparaciones tienen una distribución aproximadamente normal con media \$400 y una desviación estándar de \$20. Si el presupuesto para la próxima semana para esas reparaciones es de \$450.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los costos reales sean mayores a la cantidad presupuestada?

b) Calcular la probabilidad de que en tres de las siguientes cinco semanas, los gastos semanales de mantenimiento sean mayores que la cantidad presupuestada.

15 Puntos

Resolución

a) Sea X la v.a. que representa los gastos semanales del mantenimiento.

$X \sim Normal\left(\mu_X = \$400\ ,\ \sigma_X = \$20\right)$

Se pide calcular la probabilidad de que los gastos semanales de mantenimiento rebasen los \$450, esto es: $P\ (\ X\ >\ 450\ )$

entonces:

$$P\ (\ X\ >\ 450\ ) \approx P\left(Z\ >\ \frac{450-400}{20}\right) = P\left(Z > \frac{5}{2}\right) = P\left(Z > 2.50\right)$$

Usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$P\left(Z\ >\ 2.50\right) = 1 - F_Z\left(2.50\right) = 1 - 0.9938 = 0.006$

b) Sea Y la v.a. que representa el número de semanas en las que se rebasan los gastos semanales de mantenimiento de las siguientes cinco semanas.

$Y \sim Binomial\left(n = 5\ ,\ p\ =\ 0.006\right)$

calcular $P\ (\ Y\ =\ 3\ )$

entonces:

$$P\ (Y\ =\ 3)\ =\ \binom{5}{3}\ \left(0.006\right)^3 \left(1 - 0.006\right)^2 = 2.1 \times 10^{-6}$$

o bien, aproximadamente cero.

5. Sea la función

$$f_{XY}(\mathrm{x,y}) = \begin{cases} 2\,\mathrm{x} & ; \quad 0 \le \mathrm{x} \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encontrar las funciones de densidad marginal para X y Y.

b) ¿Son X y Y variables aleatorias conjuntas independientes?

c) Calcular $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3}\ \middle|\ \mathrm{Y} \le \frac{1}{4}\right)$.

20 Puntos

Resolución

a) Las funciones marginales están definidas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$$

sustituyendo se tiene:

$$f_X(x) = \int_0^1 2x\, dy \;=\; (2xy)\Big|_0^1 \;=\; 2x \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 2x\, dx \;=\; (x^2)\Big|_0^1 \;=\; 1 \quad ; \quad 0 \le y \le 1$$

b) Para que las vv.aa. sean independientes, debe cumplir:

$$f_{XY}(x,y) \;=\; f_X(x) f_Y(y)$$

sustituyendo:

$$2x = (2x)(1)$$

$$2x = 2x$$

por lo tanto, sí cumple son variables estadísticamente independientes.

c) Se pide calcular $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3} \;\middle|\; Y \le \frac{1}{4}\right)$

Como X y Y son independientes, se sabe que:

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3} \;\middle|\; Y \le \frac{1}{4}\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3}\right)$$

entonces:

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} 2x\, dx \;= \frac{7}{36} \approx 0.194$$

De otra forma:

se sabe que: $$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3} \;\middle|\; Y \le \frac{1}{4}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3} \cap Y \le \frac{1}{4}\right)}{P\left(Y \le \frac{1}{4}\right)}$$

sustituyendo:

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3} \;\middle|\; Y \le \frac{1}{4}\right) = \frac{\int_0^{\frac{1}{4}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} 2x dx dy}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{7}{144}}{\frac{1}{4}} = \frac{7(4)}{144} = \frac{28}{144} = \frac{7}{36} \approx 0.194$$

6. Si cierta máquina fabrica resistencias eléctricas que tienen aproximadamente distribución normal con una resistencia media de 40 [ohms] y una desviación estándar de 2 [ohms]. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 36 de estas resistencias tengan una resistencia media combinada de más de 1458 [ohms]?

15 Puntos

Resolución

Sea X la v.a. que representa la resistencia de los resistores.

$$X \sim Normal\left(\mu_X = 40 \;,\; \sigma_X^2 = 2^2\right)$$

Sea X_i la v.a. que representa la resistencia de los resistores, $i = 1, 2, \ldots, 36$.

$$X_i \sim Normal\left(\mu_{X_i} = 40 \;,\; \sigma_{X_i}^2 = 2^2\right) \quad , \quad \text{i=1,2,...,36}$$

la variable aleatoria para las 36 resistencias queda definida como:

$T = X_1 + X_2 + ... + X_{36}$

entonces:

$T \sim Normal\left(\mu_T = n\mu_X \ , \ \sigma_T^2 = n\sigma_X^2\right)$

que es igual a:

$T \sim Normal\left(\mu_T = 1440 \ , \ \sigma_T^2 = 144\right)$

entonces:

$$P\ (\ T\ >\ 1458\ ) \approx P\left(Z\ >\ \frac{1458-1440}{\sqrt{144}}\right) = P(Z > 1.5)$$

usando tablas de la función de distribución acumulativa normal estándar:

$P(Z > 1.5) = 1 - F_Z(1.50) = 1 - 0.9332 = 0.0668$