Información general

Objetivo

El examen extraordinario de la asignatura de Matemáticas Avanzadas es una prueba confiable, válida, pertinente y objetiva, empleada para apoyar a los estudiantes que por diversas situaciones: académicas, personales, económicas, etc.,aún no acreditan la asignatura. Que cursan el nivel superior en la Facultad de Ingeniería. Su objetivo es medir los conocimientos necesarios y habilidades que le permitan al estudiante, continuar con su formación como futuro ingeniero en la Facultad de Ingeniería.

Propósito del examen

El examen extraordinario esta diseñado por docentes de la asignatura con experiencia en la impartición de la misma, para evaluar a los estudiantes, pero tiene una mayor posibilidad de éxito en los estudiantes que ya cursaron la asignatura y tienen calificaciones desfavorables dado su nivel de desempeño en los cursos curriculares.

Población a la que está dirigido el examen

Preferentemente se sugiere que sean estudiantes que han cursado la asignatura o bien tengan los conocimientos mínimos indispensables para continuar con su formación como ingenieros, así también se aplica a estudiantes que, habiendo concluido el semestre y realizado los exámenes ordinarios, la calificación no fue aprobatoria; es decir, es un examen de uso institucional, por lo que ***no se aplica a solicitantes individuales***.

Tipo de instrumento

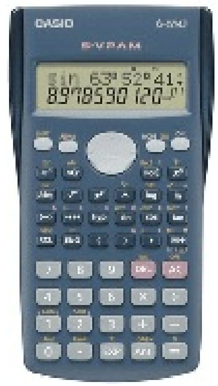
Incluye únicamente preguntas sobre los tópicos del programa de Matemáticas Avanzadas (http://www.ingenieria.unam.mx/paginas/Carreras/planes2016/planes/Mecatronica.pdf) y son cuidadosamente diseñados y probados en el ámbito escolar, por lo que su respuesta no depende de una interpretación.

Consta de cinco preguntas, las cuales tienen una ponderación de dos puntos cada una de ellas para la calificación que se reporta. La puntuación que logre el estudiante y en cada uno de los temas de la prueba, con base en los siguientes valores:

Reactivo contestado correctamente = 2 puntos
Reactivo contestado erróneamente = 1 punto
Reactivo no contestado = 0 punto

Modalidad

Se aplica en hojas de papel con membrete de la UNAM y datos generales de la asignatura, el estudiante puede ingresar al espacio de aplicación con dos o tres lápices, sacapuntas, goma o borrador y una calculadora científica (no programable) con las funciones que muestra la imagen.



Está prohibido usar en el espacio de aplicación cualquier otro dispositivo, incluidos teléfonos celulares, reproductores de música, tabletas y computadoras portátiles.

Preparativos antes de acudir al examen

Estudiar los contenidos del programa vigente de la asignatura, es conveniente bajar de la página del Departamento el formulario en caso de ser necesario y tener una identificación oficial vigente con fotografía (credencial de la Facultad de Ingeniería, INE, pasaporte y licencia de conducir). Verificar la fecha, hora y lugar de la realización del examen.

Duración

El tiempo para resolver el examen es de dos horas.

Requisitos

Estar inscrito en el examen extraordinario, presentar comprobante de inscripción y una identificación oficial vigente con fotografía.

¿Qué se evalúa?

En el campo académico, tener capacidad para responder cuestionamientos de variable compleja y análisis de Fourier (series de Fourier y transformada de Fourier), integrando habilidades y conocimientos.

Evalúa la habilidad de conocimiento e identificación de información y contenidos específicos del programa; también la capacidad de sistematización e integración mediante el uso de fórmulas, reglas o teorías, ordenamiento o agrupación de información; finalmente, también indaga la competencia de interpretación y aplicación mediante situaciones que exigen su formación como ingenieros y solucionar problemas.

En particular, el área de pensamiento matemático explora la competencia para comprender y resolver situaciones que implican el uso de razonamiento aritmético, algebraico, geométrico , trigonométrico y cálculo diferencial. Es decir, comprende el conjunto de las competencias disciplinares básicas del campo matemático que debieron aprenderse y dominarse en los cursos anteriores.

Problema 1

Calcular la siguiente integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^4\left(z^2-9\right)(z-4)}$$

Resolución

Si una función es analítica, la suma de todos sus residuos es igual a cero.

Eligiendo los residuos interiores, el proceso resulta muy complicado, pues se necesita obtener el residuo de un polo de orden cuatro y se tendría que derivar hasta el cuarto orden.

Si se hace por los residuos exteriores se tiene que el infinito es un cero de orden siete, por lo tanto su residuo es cero.

Se resolverá de la siguiente manera:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^4\left(z^2-9\right)(z-4)} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f,3)+\operatorname{Res}(f,-3)+\operatorname{Res}(f,4)+\operatorname{Res}(f,\infty)\right]$$

Donde los residuos tienen el valor de:

$$\operatorname{Res}(f,3) = \lim_{z\to 3} f(z)(z-3) = \lim_{z\to 3} \frac{dz}{(z+1)^4(z+3)(z-4)} = -\frac{1}{1536}$$

$$\operatorname{Res}(f,-3) = \lim_{z\to -3} f(z)(z+3) = \lim_{z\to -3} \frac{dz}{(z+1)^4(z-3)(z-4)} = \frac{1}{672}$$

$$\operatorname{Res}(f,4) = \lim_{z\to 4} f(z)(z-4) = \lim_{z\to 4} \frac{dz}{(z+1)^4\left(z^2-9\right)} = \frac{1}{4375}$$

Finalmente al sustituir los residuos calculados se tiene, que el valor de la integral es:

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^4(z^2-9)(z-4)} = 2\pi i\left[-\frac{1}{1536}+\frac{1}{672}+\frac{1}{4375}\right] = 2\pi i\left[\frac{341}{320000}\right]$$

Problema 2

Hallar la transformada inversa de Fourier de la siguiente función

$$F(\omega) = \frac{3i\omega+6}{-\omega^2+5i\omega+6}$$

Resolución

Si se factoriza la expresión tenemos

$$F(\omega) = \frac{3i\omega+6}{-\omega^2+5i\omega+6} = \frac{3(i\omega+2)}{(i\omega+2)(i\omega+3)} = \frac{3}{i\omega+3}$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier, se tiene:

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{3i\omega+6}{-\omega^2+5i\omega+6}\right\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{3}{3+i\omega}\right\} = 3\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\} = 3H(t)e^{-3t}$$

Problema 3

Resuelva la siguiente integral $\oint_C \frac{3z-2}{z^2-z}\,dz$; siendo C la curva determinada por $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$, recorrida en sentido antihorario.

Resolución

Se tiene que $z^2-z=z(z-1)=0$, por lo que $z_1=0$ y $z_2=1$ con ello se tiene que la función se puede expresar como:

$$f(z) = \frac{3z - 2}{z(z - 1)}$$

La cual es una función racional y analítica en $\mathbb{C} = \{0, 1\}$, es necesaro observar que z_1 y z_2 están en el interior de C, por lo que no se puede aplicar el teorema de Cauchy. Pero considerando C_1 de radio ε_1 y centro en cero; así también C_2 de radio ε_2 y centro en uno, tales que C_1 y C_2 estén dentro de C, pero su intersección sea igual a cero, recorridas en sentido antihorario.

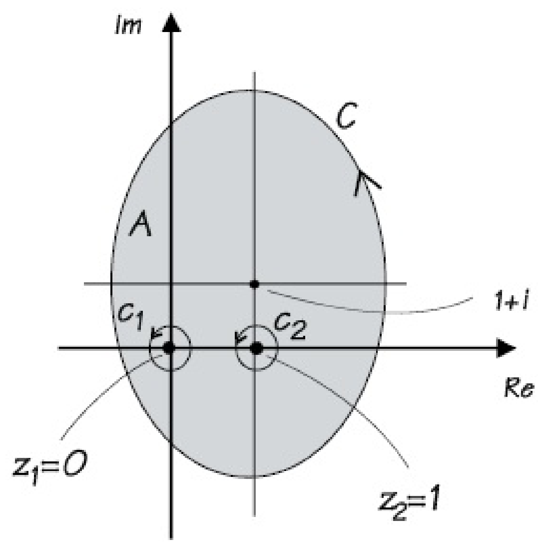


Fig. 1 Función racional y analítica en C

Se obtiene la derivada de $f(z)$ y se observa que es una función racional y continua en C_1, C_2 y C.

$$f'(z) = \frac{-3z^2 + 4z - 2}{z^2(z - 1)^2}$$

Aplicando el teorema de la deformación de la trayectoria, se tiene:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Por fracciones parciales se tiene que $f(z)$ es equivalente

$$f(z) = \frac{3z-2}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$$

Resolviendo se tiene

$$\begin{aligned}
3z-2 &= \frac{A\,z\,(z-1)}{z} + \frac{B\,z\,(z-1)}{z-1} \\
3z-2 &= A\,(z-1) + B\,z \\
3z-2 &= Az - A + B\,z \\
3z-2 &= (A+B)\,z - A
\end{aligned}$$

Simplificando se llega al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
A + B &= 3 \\
A &= 2
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, los valores de $A = 2$ y $B = 1$

Con lo cual se obtiene que $f(z) = \dfrac{3z-2}{z(z-1)} = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z-1}$

Al sustituir en el teorema de la deformación de la trayectoria, se tiene:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\oint_{C_1} \frac{dz}{z} + \oint_{C_1} \frac{dz}{z-1} + 2\oint_{C_2} \frac{dz}{z} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z-1}$$

Resolviendo cada una de las integrales:

$$2\oint_{C_1}\frac{dz}{z} = 2(2\pi i) = 4\pi i$$

$$\oint_{C_1}\frac{dz}{z-1} = 0$$

$$2\oint_{C_2}\frac{dz}{z} = 0$$

$$\oint_{C_2}\frac{dz}{z-1} = 2\pi i$$

Finalmente se tiene, que la integral calculada es

$$\oint_{C}\frac{3z-2}{z^2-z}\,dz = 4\pi i + 2\pi i = 6\pi i$$

Problema 4

Determinar la serie de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, alrededor de $z_0 = -1$ y trazar el disco de convergencia.

Resolución

Se tiene que $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ la podemos expresar de forma equivalente como:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-1-z} = \frac{1}{2-(1+z)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1+z}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1+z}{2}}$$

De la expresión equivalente, se observa que $\dfrac{1}{1-\dfrac{1+z}{2}}$, es una serie geométrica convergente si $\left|\dfrac{1+z}{2}\right|<1$; es decir, $-1<\left|\dfrac{1+z}{2}\right|<1$ o bien $-2<|1+z|<2$. Por lo tanto se puede expresar $f(z)$ como $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$ que converge si $|z|<1$; es decir, $-1<z<1$ o bien $0<1+z<2$; entonces es cierto que $-2<|1+z|<2$, es un círculo de centro en -1 y radio 2.

Por lo tanto la serie de Taylor de $f(z)$ es:

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1+z}{2}+\frac{(1+z)^2}{4}+\cdots\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+z)^n}{2^{n+1}}$$

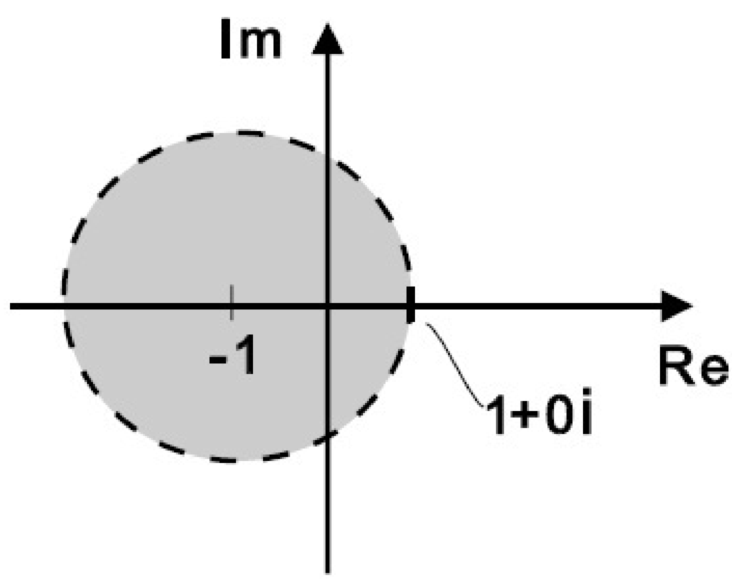


Fig. 2 Disco de convergencia en $|1+z|<2$

Problema 5

Determinar la serie de Fourier de sólo cosenos para la función $f(x) = x$ en $[0, 2]$ y mediante la relación de Parseval, probar que se cumple:

$$\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

Resolución

Considerando la extensión par de $f(x)$ a $[-2, 2]$, se tiene:

$$a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) dx = \begin{cases} 0 & ;\ n \quad \text{par} \\ -\dfrac{8}{n^2\pi^2} & ;\ n \quad \text{impar} \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Parseval se tiene:

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{16}{3}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}\int_{-p}^{p} f^2(x)\,dx = \frac{8}{3}$$

$$\frac{a_0^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^4(2n-1)^4} \quad \forall\ n \text{ impar}$$

Realizando las operaciones, se comprueba que cumple la igualdad

$$\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

Problema 6

Sea $f(z) = \dfrac{z+2}{z+1}$. Obtener y trazar la gráfica de los valores de z tales que:

a) $f(z)$ sea real puro,

b) $f(z)$ sea imaginario puro.

Resolución

Se escribirá la función en la forma

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

ya que de esta manera se tienen claramente sus partes real e imaginaria. Para ello se sustituye $z = x + iy$, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(x+iy)+2}{(x+iy)+1} = \frac{(x+2)+iy}{(x+1)+iy} = \frac{(x+2)+iy}{(x+1)+iy}\,\frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} \\ &= \frac{(x^2+y^2+3x+2)-iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2+3x+2)}{(x+1)^2+y^2} + i\,\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} \end{aligned}$$

a) Para que $f(z)$ sea real pura se debe cumplir que $\operatorname{Im}\left[f(z)\right] = 0$; es decir,

$$\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} = 0$$

de donde $y = 0$ y $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq -1$. La gráfica de este conjunto de puntos se muestra en la Fig.3.

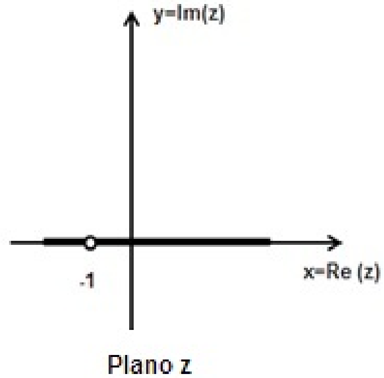


Fig. 3 Valores de z para los cuales $\mathrm{Im}\left[f(z)\right]=0$

b) Para que $f(z)$ sea imaginaria pura se debe cumplir que $\mathrm{Re}\left[f(z)\right]=0$; es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+y^2+3x+2}{(x+1)^2+y^2} &= 0\\
x^2+y^2+3x+2 &= 0\\
\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+y^2-\frac{1}{4} &= 0\\
\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2 &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

los cuales son los puntos de una circunferencia de radio $1/2$ con centro en el punto $(-3/2,0)$ del plano z (excluyendo a $x=-1$). La gráfica se muestra en la Fig. 4.

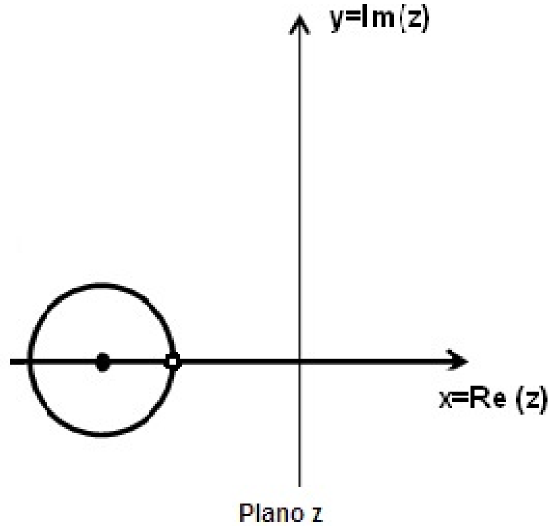


Fig. 4 Valores de z para los cuales $\mathrm{Re}\left[f(z)\right]=0$

Problema 7

Demostrar que la función $u(x,y)=\operatorname{sen}(x)\cosh(y)$ es armónica y obtener la función analítica $f(z)$ tal que $u(x,y)=\mathrm{Re}\left[f(z)\right]$ y $f(\pi/2,\ln 2)=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}i$

Resolución

La función $u(x,y)=\operatorname{sen}(x)\cosh(y)$ es armónica si su laplaciano es igual a cero; es decir,

$$\begin{aligned}
\operatorname{lap} u(x,y) &= 0\\
\nabla^2 u(x,y) &= 0\\
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y) &= 0\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0
\end{aligned}$$

Calculando las derivadas parciales sucesivas de segundo orden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x)\cosh(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\operatorname{sen}(x)\cosh(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$$

Sumando se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\operatorname{sen}(x)\cosh(y) + \operatorname{sen}(x)\cosh(y) = 0$$

con lo que se demuestra lo solicitado. Esto garantiza que existe la función $v(x,y)$ armónica conjugada de $u(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ sea analítica.

Se procederá ahora a obtener $v(x,y)$. Como $f(z)$ es analítica, $u(x,y)$ y $v(x,y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, con lo cual

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x}\\ &= \cos(x)\cosh(y) \quad \ldots\ (1)\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial y}\\ &= -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) \quad \ldots\ (2)\end{aligned}$$

Integrando (1):

$$u(x,y) = \int \cos(x)\cosh(y)\,dy + g(x) = \cos(x)\operatorname{senh}(y) + g(x)$$

Derivando parcialmente respecto a x e igualando en (2):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) + g'(x) = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y) \\
g'(x) &= 0 \\
g(x) &= C
\end{aligned}$$

Por lo tanto $v(x, y) = \cos(x)\operatorname{senh}(y) + C$ y

$$f(z) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\left[\cos(x)\operatorname{senh}(y) + C\right]$$

De la condición dada

$$\begin{aligned}
f(\pi/2, \ln 2) &= \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i \\
\operatorname{sen}(\pi/2)\cosh(\ln 2) + i\left[\cos(\pi/2)\operatorname{senh}(\ln 2) + C\right] &= \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i \\
\frac{5}{4} + Ci &= \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i \\
C &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(z) = \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\left[\cos(x)\operatorname{senh}(y) + \frac{3}{4}\right]$$

Problema 8

Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle \oint_C \frac{z}{\left(1 - z^3\right)}\, dz$

donde C está dada por $\left|z + \frac{1}{2}\right| = 1$.

b) $\displaystyle \oint_C \frac{z^2 + (1-2i)}{\operatorname{sen}(z)}\, dz$

donde C está dada por $|z| = 4$.

Resolución

a) Las raíces del denominador son:

$z^3 = 1$ expresando al número complejo en forma polar se tiene:

$$
\begin{aligned}
z_k &= e^{i\left(\frac{2k\pi}{3}\right)} \\
z_0 &= 1 \\
z_1 &= e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
z_2 &= e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

El integrando se puede escribir en la forma

$$\frac{z}{1-z^3} = \frac{-z}{(z-1)\left[z + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]\left[z + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]}$$

Como

$$
\begin{aligned}
\left|1 + \frac{1}{2}\right| &= \frac{3}{2} > 1 \\
\left|\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \frac{1}{2}\right| &= \left|\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1
\end{aligned}
$$

sólo los puntos $z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ se encuentran dentro de la curva, lo cual se observa en la siguiente gráfica, de la Fig. 5.

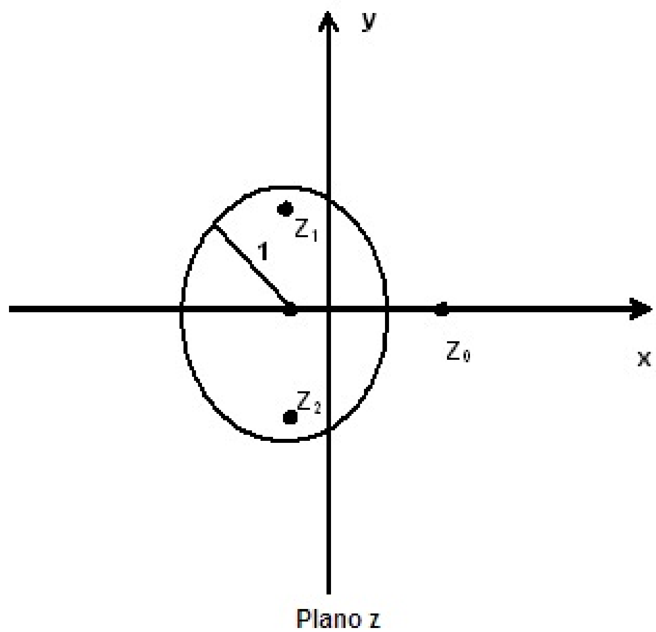


Fig. 5 Puntos singulares de f.

Por el teorema del residuo, se tiene:

$$\oint_C \frac{z}{1 - z^3}\, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2) \right]$$

Calculando los residuos.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\{f, z_1\} &= \lim_{z \to z_1}\left[\left(z - z_1\right) f(z)\right] \\ &= \lim_{z \to -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i} \frac{-z}{(z-1)\left[z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right]} \\ &= \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i}{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\sqrt{3}\, i} = \frac{1}{6}\left(1+\sqrt{3}\, i\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\{f, z_2\} &= \lim_{z \to z_2}\left[\left(z - z_2\right) f(z)\right] \\ &= \lim_{z \to -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i} \frac{-z}{(z-1)\left[z+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right]} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} i}{\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(-\sqrt{3}\, i\right)} = \frac{1}{6}\left(1-\sqrt{3}\, i\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z}{1-z^3}\, dz &= 2\pi i\left[\frac{1}{6}\left(1+\sqrt{3}\, i\right)+\frac{1}{6}\left(1-\sqrt{3}\, i\right)\right] \\ &= \frac{2\pi i}{3}\end{aligned}$$

b) Como $C : |z| = 4$, la función $f(z) = \left[z^2 + (1-2i)\right] / \operatorname{sen}(z)$ tiene polos simples en $z_i = 0\ , \pm\pi$ por lo que

$$\operatorname{Res}\left(f, z_i\right) = \frac{z_i^2 + (1 - 2i)}{\cos(zi)}$$

en particular

$$\operatorname{Res}\left(f, 0\right) = \frac{1 - 2i}{\cos(0)} = 1 - 2i$$

$$\operatorname{Res}\left(f, \pm\pi\right) = \frac{\pi^2 + (1 - 2i)}{\cos(\pm\pi)} = -\left(\pi^2 + 1\right) + 2i$$

y por el teorema del residuo

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{z^2 + (1 - 2i)}{\operatorname{sen}(z)}\, dz &= 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, -\pi) + \operatorname{Res}(f, \pi)\right] \\
&= 2\pi i\left[1 - 2i - 2\left(\pi^2 + 1\right) + 4i\right] = 2\pi i\left[-\left(1 + 2\pi^2\right) + 2i\right] \\
&= 2\pi i\left[2 + \left(1 + 2\pi^2\right) i\right]
\end{aligned}$$

Problema 9

Obtener la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(t) = |2t|, \quad -2 \le t \le 2$$

y mediante ella calcular el valor de la suma

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$$

Resolución

Como

$$f(-t) = |-2t| = |2t| = f(t)$$

la función es de clase par (lo cual también se observa en la gráfica de la Fig. 6) por lo que los coeficientes de Fourier b_n son todos iguales a cero.

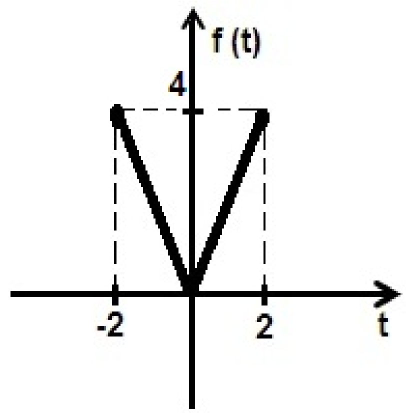


Fig. 6 Gráfica de f(t)

Los coeficientes a_0 y a_n están dados por

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \int_0^L 2t\,dt = t^2\Big|_0^2 = 4$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt = \int_0^2 2t\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$$

$$= \left[\frac{4}{n\pi}t\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{2}t\right) + \frac{8}{n^2\pi^2}t\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]\Bigg|_1^2$$

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{8}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de f es

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} t \right) \\
&= 2 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1 \right] \cos\left(\frac{n\pi}{2} t \right) \\
&= 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} t \right)
\end{aligned}
$$

La función es continua en $t = 0$ por lo que su serie de Fourier converge a 0, con lo cual se tiene

$$0 = 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

Problema 10

Obtener, de dos formas diferentes, la transformada inversa de la función:

$$F(\omega) = \frac{1}{(3 + i\omega)^2}$$

Resolución

Primera forma. Con el teorema de convolución

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} &= \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(3+i\omega)^2}\right\} \\
f(t) &= \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\ \frac{1}{3+i\omega}\right\} \\
&= \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\} * \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\}
\end{aligned}$$

Como

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+i\omega}\right\} = H(t)\,e^{-at},\ \ a>0$$

entonces

$$f(t) = H(t)\,e^{-3t} * H(t)\,e^{-3t}$$

y de la definición de la convolución:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau)\,e^{-3\tau}\,H(t-\tau)\,e^{-3(t-\tau)}\,d\tau$$

de la función de función de Heaveside:

$$\begin{aligned}
H(\tau)H(t-\tau) &= \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < 0 \text{ ó } t-\tau < 0 \\ 1 & \text{si } \tau > 0 \text{ y } t-\tau > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(t) = \begin{cases} e^{-3t} \displaystyle\int_0^t d\tau & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-3t} \tau \Big|_0^t & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} t e^{-3t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$= t H(t) e^{-3t}$$

Segunda forma. Con el teorema de derivación respecto a la variable frecuencia.

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(3+i\omega)^2}\right\}$$

$$f(t) = i\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{3+i\omega}\right)\right\}$$

y como

$$\mathscr{F}^{-1}\{F^{(n)}(\omega)\} = \frac{1}{i^n} t^n f(t) = \frac{1}{i^n} t^n \mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\}$$

entonces para $n = 1$ se tiene

$$f(t) = t\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{3+i\omega}\right\}$$

$$= t H(t) e^{-3t}$$

Se observa que es mucho más fácil de la segunda forma.

Problema 11

Expresar la función $f(z)=(z-2i)\,\text{Log}(3yi)$; en su forma binómica: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Resolución

Primera caso, $y>0$

$$\begin{aligned}(z-2i)\,\text{Log}(3yi) &= [x+(y-2)i]\left[\ln(3y)+\frac{\pi}{2}i\right]\\ &= \left[x\ln(3y)-\frac{\pi}{2}(y-2)\right]+\left[\frac{\pi}{2}x+(y-2)\ln(3y)\right]i\end{aligned}$$

Segundo caso, $y<0$

$$\begin{aligned}(z-2i)\,\text{Log}(3yi) &= [x+(y-2)i]\left[\ln(3y)-\frac{\pi}{2}i\right]\\ &= \left[x\ln(3y)+\frac{\pi}{2}(y-2)\right]+\left[-\frac{\pi}{2}x+(y-2)\ln(3y)\right]i\end{aligned}$$

Tercer caso, $y=0$

$$(z-2i)\,\text{Log}(3yi) = [x-2i]\left[\ln(0)-\frac{\pi}{2}i\right]$$

$$(\text{no existe})$$

Problema 12

Calcular el valor de la integral de contorno cerrado:

$$\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2 + 2z + 2}\, dz; \quad C : | z - 2i | = 2$$

Resolución

Factorizando:

$$z^2 + 2z + 2 = [z - (-1 + i)][z - (-1 - i)]$$

Entonces, de las dos singularidades sólo una está encerrada por el contorno C:

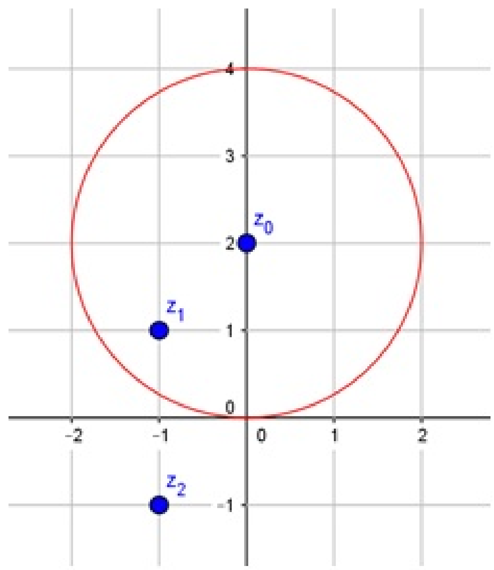


Fig. 7 Gráfica del contorno de C

La integral se resuelve entonces con la fórmula de la integral de Cauchy:

$$\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2+2z+2}\,dz = \oint_C \frac{\dfrac{e^{zi}}{z-(-1-i)}}{z-(-1+i)}\,dz$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{zi}}{z-(-1-i)}\right|_{z=-1+i}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{(-1+i)i}}{-1+i-(-1-i)}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-1-i}}{2i} = \frac{\pi}{e}\left(\cos(1) - i\,\mathrm{sen}(1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{e}(0.54 - 0.841i) = 1.156(0.54 - 0.841i) = 0.624 - 0.972i$$

Problema 13

Sea la función,

$$f(z) = \frac{z^5 - z^3 + 1}{(z-1)^3}$$

Desarrollar una serie de Laurent alrededor de $z_0 = 1$, que converja a $f(z)$. Indicar y trazar la región de convergencia.

Resolución

Se desarrolla la función $z^5 - z^3 + 1$ en una serie de Taylor alrededor de $z_0 = 1$

n	$f^{(n)}(z)$	$f^{(n)}(1)$	c_n	$(z-1)^n$
0	$z^5 - z^3 + 1$	$1 - 1 + 1$	1	1
1	$5z^4 - 3z^2$	$5 - 3$	2	$(z-1)$

2	$20z^3 - 6z$	$20 - 6$	$14/2! = 7$	$(z-1)^2$
3	$60z^2 - 6$	$60 - 6$	$54/3! = 9$	$(z-1)^3$
4	$120z$	120	$120/4! = 5$	$(z-1)^4$
5	120	120	$120/5! = 1$	$(z-1)^5$

Entonces:

$$f(z) = \frac{1 + 2(z-1) + 7(z-1)^2 + 9(z-1)^3 + 5(z-1)^4 + (z-1)^5}{(z-1)^3} \quad ; \quad 0 < |z-1|$$

o bien

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{7}{(z-1)} + 9 + 5(z-1) + (z-1)^2 \quad ; \quad 0 < |z-1|$$

Problema 14

Sea la función $f(t) = t$, definida

a) Desarrollar una serie trigonométrica de Fourier en cosenos que converja a $f(t)$ en el intervalo $t \in [1, 2]$.

b) Graficar su espectro en frecuencia.

Resolución

a) Para que la función sea par, y tenga una serie trigonométrica de Fourier en cosenos, completamos como se muestra en la figura.

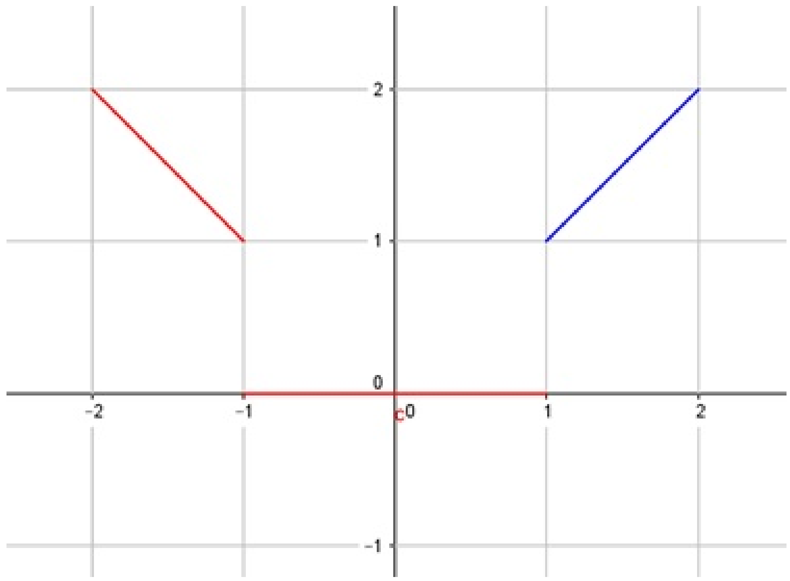


Fig. 8 Gráfica de la función f(t) = t

Se observa que el rango completo es $T = 4$, por lo tanto, el medio rango $L = 2$

Por ser una función par, $b_n = 0$; para determinar a_n, se tiene que calcular la integral:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L t\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\frac{n\pi t}{2}\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right]_1^2 \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[n\pi\,\text{sen}(n\pi) + \cos(n\pi) - \frac{n\pi}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right] \\
&= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - \frac{n\pi}{2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

n	$a_n = \dfrac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - \dfrac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]; n > 0$	a_n
0	$a_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(t)\,dt = \quad \int_1^2 t\,dt = \dfrac{t^2}{2}\Big\vert_1^2 = 2 - \dfrac{1}{2}$	1.5
1	$\dfrac{4}{\pi^2}\left[(-1) - \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{\pi^2}\left[-1 - \dfrac{\pi}{2}\right]$	$\dfrac{-2(2+\pi)}{\pi^2}$
2	$\dfrac{4}{4\pi^2}\left[(-1)^2 - \pi\operatorname{sen}(\pi) - \cos(\pi)\right] = \dfrac{4}{4\pi^2}[1+1]$	$\dfrac{4(2)}{2^2\pi^2}$
3	$\dfrac{4}{3^2\pi^2}\left[(-1)^3 - \dfrac{3\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{3^2\pi^2}\left[-1 + \dfrac{3\pi}{2}\right]$	$\dfrac{-2(2+3\pi)}{3^2\pi^2}$
4	$\dfrac{4}{4^2\pi^2}\left[(-1)^4 - \dfrac{4\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{4\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{4\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{1}{4\pi^2}[1-1]$	0
5	$\dfrac{4}{5^2\pi^2}\left[(-1)^5 - \dfrac{5\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{5^2\pi^2}\left[-1 - \dfrac{5\pi}{2}\right]$	$\dfrac{-2(2+5\pi)}{5^2\pi^2}$
6	$\dfrac{4}{6^2\pi^2}\left[(-1)^6 - \dfrac{6\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{6\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{6\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{6^2\pi^2}[1+1]$	$\dfrac{-4(2)}{6^2\pi^2}$
7	$\dfrac{4}{7^2\pi^2}\left[(-1)^7 - \dfrac{7\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{7\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{7^2\pi^2}\left[-1 + \dfrac{7\pi}{2}\right]$	$\dfrac{-2(2+7\pi)}{7^2\pi^2}$
8	$\dfrac{4}{8^2\pi^2}\left[(-1)^8 - \dfrac{8\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{8\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{8\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{8^2\pi^2}[1-1]$	0
9	$\dfrac{4}{9^2\pi^2}\left[(-1)^9 - \dfrac{9\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{9\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{9^2\pi^2}\left[-1 - \dfrac{9\pi}{2}\right]$	$\dfrac{-2(2+9\pi)}{9^2\pi^2}$
10	$\dfrac{4}{10^2\pi^2}\left[(-1)^{10} - \dfrac{10\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{10\pi}{2}\right) - \cos\left(\dfrac{10\pi}{2}\right)\right] = \dfrac{4}{10^2\pi^2}[1+1]$	$\dfrac{4(2)}{10^2\pi^2}$

$$f(t) = 0.75 - \frac{4+2\pi}{\pi^2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{8}{2^2\pi^2}\cos\pi t - \frac{4-6\pi}{3^2\pi^2}\cos\frac{3\pi t}{2} - \frac{4-10\pi}{5^2\pi^2}\cos\frac{5\pi t}{2}$$
$$- \frac{8}{6^2\pi^2}\cos\frac{6\pi t}{2} - \frac{4-14\pi}{7^2\pi^2}\cos\frac{7\pi t}{2} - \frac{4+18\pi}{9^2\pi^2}\cos\frac{9\pi t}{2} + \frac{8}{10^2\pi^2}\cos\frac{10\pi t}{2}$$
$$- \cdots \quad ; \quad 1 < t < 2$$

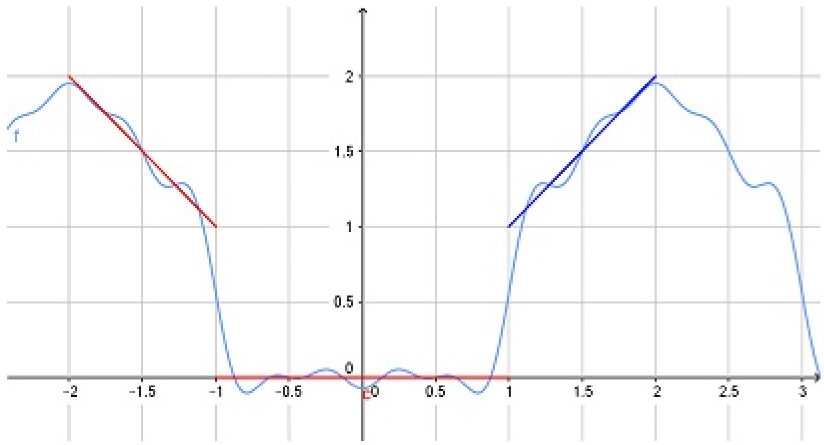


Fig. 9 Gráfica de la serie trigonométrica de Fourier

b) Graficar su espectro en frecuencia.

El espectro en frecuencia se grafica con los coeficientes de la serie compleja de Fourier.

n	$c_n = \frac{a_n - b_n i}{2} = \frac{a_n}{2}$	c_n
0	$\frac{1.5}{2}$	0.75
± 1	$\frac{-(2+\pi)}{\pi^2}$	-0.521

± 2	$\dfrac{4}{2^2\pi^2}$	0.101
± 3	$\dfrac{-(2+3\pi)}{3^2\pi^2}$	0.084
± 4	0	0
± 5	$\dfrac{-(2+5\pi)}{5^2\pi^2}$	− 0.072
± 6	$\dfrac{-4}{6^2\pi^2}$	− 0.011
± 7	$\dfrac{-(2+7\pi)}{7^2\pi^2}$	0.041
± 8	0	0
± 9	$\dfrac{-2(2+9\pi)}{9^2\pi^2}$	− 0.076
± 10	$\dfrac{4(2)}{10^2\pi^2}$	0.008

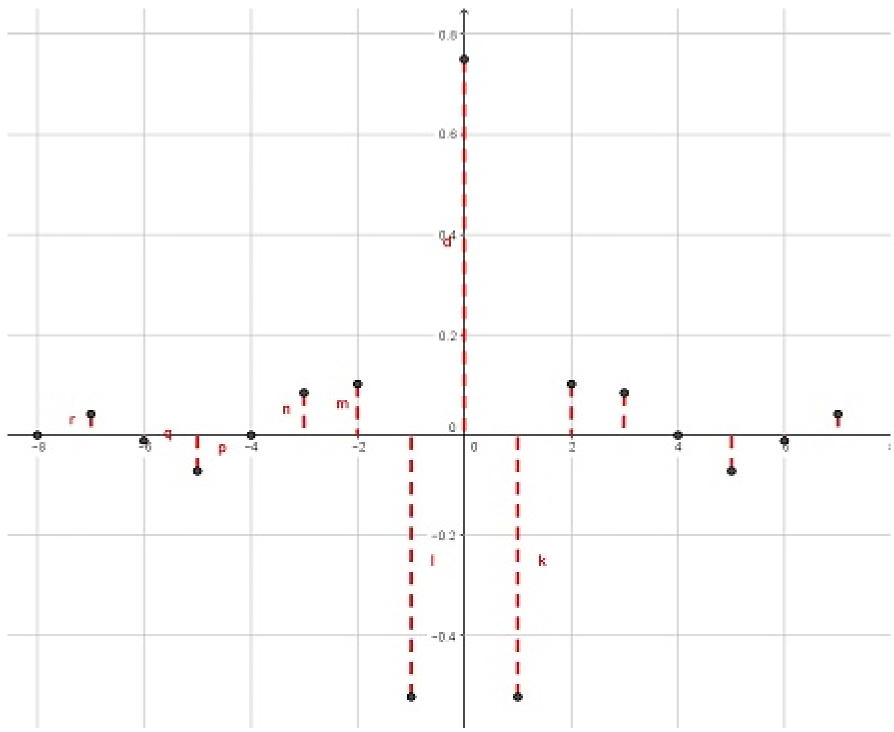


Fig. 10 Gráfica del espectro de frecuencia

Problema 15

Determinar la anti-transformada de Fourier de la función y hacer un bosquejo de ella:

$$\mathscr{F}^{-1} = \left\{ -\frac{45\pi}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(-3\omega)}{\omega} \right\}$$

Resolución

La función seno es una función impar, por lo tanto, $\operatorname{sen}(-3\omega) = -\operatorname{sen}(3\omega)$, multiplicamos y dividimos con 3

$$\mathscr{F}^{-1} = \left\{ -\frac{45\pi}{2} \, \frac{\operatorname{sen}(-3\omega)}{\omega} \right\}$$

Por otro lado se seba que

$$\mathscr{F}\{ kH(t+a) - kH(t-a) \} = 2ak \frac{\operatorname{sen}(a\omega)}{a\omega}$$

entonces

$$a = 3 \ , \ \text{y} \ \ 2ak = \frac{45\pi}{2} \ ;$$

despejando $k = \dfrac{45\pi}{12}$

Finalmente la anti-transformada de Fourier de la función es

$$f(t) = \frac{15\pi}{4} H(t+3) - \frac{15\pi}{4} H(t-3)$$