Conferencia clase

"Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales usando álgebra lineal"

Contenido.

1. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.
2. Forma matricial de un sistema de ecuaciones.
3. Valores propios, vectores propios.
4. Wronskiano y matriz fundamental.
5. Valores propios reales diferentes.
6. Valores propios reales repetidos.
7. Valores propios imaginarios conjugados.
8. Parte no homogénea.

1.- Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

En ocasiones, los sistemas lineales de coeficientes constantes (invariantes en el tiempo) de orden superior se reducen a sistemas lineales de primer orden por medio un cambio de variable.

$$a2\, x''(t) + a1\, x'(t) + a0\, x(t) = F(t)$$

Normalizando

$$x''(t) + \frac{a1}{a2}\, x'(t) + \frac{a0}{a2}\, x(t) = \frac{F(t)}{a2}$$

Proponiendo un cambio de variable, en este caso, con la primera derivada de la variable dependiente, se tiene

$$x'(t) = v(t)$$

$$x''(t) = v'(t)$$

El sistema de ecuaciones queda

$$v'(t) + \frac{a1}{a2}\, v(t) + \frac{a0}{a2}\, x(t) = \frac{F(t)}{a2}$$

$$v(t) - x'(t) = 0$$

Este sistema de ecuaciones se puede resolver por medio de sustitución o por medio de los operadores diferenciales.

$$\begin{bmatrix} D + \frac{a1}{a2} & \frac{a0}{a2} \\ -1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F(t)}{a2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al desacoplar las ecuaciones se tiene

$$\left(D^2 + \frac{a1}{a2} D + \frac{a0}{a2}\right) \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F(t)}{a2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La estructura de la ecuación diferencial original se conserva, tanto para la variable original como para el cambio de variable propuesto.

$$\left(D^2 + \frac{a1}{a2} D + \frac{a0}{a2}\right) x(t) = \begin{vmatrix} D + \frac{a1}{a2} & \frac{F(t)}{a2} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\left(D^2 + \frac{a1}{a2} D + \frac{a0}{a2}\right) x(t) = \frac{F(t)}{a2}$$

$$\left(D^2 + \frac{a1}{a2} D + \frac{a0}{a2}\right) v(t) = \begin{vmatrix} \frac{F(t)}{a2} & \frac{a0}{a2} \\ 0 & D \end{vmatrix}$$

$$\left(D^2 + \frac{a1}{a2} D + \frac{a0}{a2}\right) v(t) = D\left[\frac{F(t)}{a2}\right]$$

La solución para las ecuaciones desacopladas viene dada por la combinación lineal del conjunto fundamental de soluciones y la solución particular.

$$\lambda^2 + \frac{a1}{a2}\lambda + \frac{a0}{a2} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a1}{2\, a2} \pm \frac{1}{2\, a2}\sqrt{a1^2 - 4\, a0\, a2}$$

$$x(t) = C1\, e^{\lambda 1\, t} + C2\, e^{\lambda 2\, t} + xp(t)$$

$$v(t) = C3\, e^{\lambda 1\, t} + C4\, e^{\lambda 2\, t} + vp(t)$$

- El sistema de ecuaciones se puede descomponer en dos ecuaciones diferenciales del mismo orden n de la original.
- Las ecuaciones características y por lo tanto, las raíces y la solución homogénea son similares.
- Al encontrar las soluciones separadas de cada ecuación, aparecen n constantes indeterminadas para cada una de ellas, en total $2n$ constantes libres.
- El número total de constantes linealmente independientes del sistema

es realmente n, por lo que hay que volver a encontrar las relaciones entre las soluciones del sistema de ecuaciones.

$$x'^{(t)} = \lambda 1\ C1\ e^{\lambda 1\ t} + \lambda 2\ C2\ e^{\lambda 2\ t} + D[xp(t)]$$

$$\lambda 1\ C1\ e^{\lambda 1\ t} + \lambda 2\ C2\ e^{\lambda 2\ t} + D[xp(t)] = C3\ e^{\lambda 1\ t} + C4\ e^{\lambda 2\ t} + vp(t)$$

$$C3 = \lambda 1\ C1$$
$$C4 = \lambda 2\ C2$$

2.- Forma matricial de un sistema de ecuaciones.

Reescribiendo el sistema de ecuaciones anterior, se pude establecer el siguiente sistema.

$$v'(t) + \frac{a1}{a2}\ v(t) + \frac{a0}{a2}\ x(t) = \frac{F(t)}{a2}$$

$$x'(t) - v(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a1/a2 & a0/a2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t)/a2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a1/a2 & -a0/a2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t)/a2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v'(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a1/a2 & -a0/a2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(t)/a2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}' = A\bar{q} + \bar{b}$$

Esta versión es similar a la ecuación diferencial de primer orden

$$x' = P\ x + g(t)$$

En la ecuación diferencial lineal de primer orden, su solución se puede obtener por medio de factor integrante, siendo

$$x' - P\ x = g(t)$$

$$\mu = e^{-\int P\ dt}$$

$$\mu(x' - P\ x) = \mu\ g(t)$$

$$e^{-\int P\ dt}(x' - P\ x) = e^{-\int P\ dt}\ g(t)$$

$$e^{-\int P\ dt}x' - e^{-\int P\ dt}P\ x = e^{-\int P\ dt}\ g(t)$$

$$d\left[e^{\int -P\ dt}x\right] = e^{\int -P\ dt}\ g(t)dt$$

$$e^{-\int P\ dt}x = \int e^{-\int P\ dt}\ g(t)dt + C1$$

$$x = e^{\int P\ dt}\int e^{-\int P\ dt}\ g(t)dt + C1e^{\int P\ dt}$$

Buscando un desarrollo similar, ahora la información del sistema de ecuaciones diferenciales está contenida en la matriz A.

3.- Valores propios, vectores propios.

Al igual que de $P(t)$ se encontraba al factor integrante necesario para resolver la ecuación diferencial, ahora los valores propios y los vectores propios contienen dicha información.

Buscando los valores propios

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\frac{a1}{a2} & -\frac{a0}{a2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\frac{a1}{a2} - \lambda & -\frac{a0}{a2} \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$Det\,(A - \lambda I) = \left(-\frac{a1}{a2} - \lambda\right)(-\lambda) - \left(-\frac{a0}{a2}\right) = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{a1}{a2}\lambda + \frac{a0}{a2} = 0$$

Resulta ser que los valores característicos de la matriz corresponden a las raíces del polinomio característico de la ecuación diferencial original.

En cuanto a los vectores principales

$$(A - \lambda 1\ I)\begin{bmatrix} k11 \\ k21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{a1}{a2} - \lambda 1 & -\frac{a0}{a2} \\ 1 & -\lambda 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k11 \\ k21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k11 - \lambda 1\ k21 = 0$$

Si

$$k21 = 1$$

$$k11 = \lambda 1$$

El primer vector principal es

$$K1 = \begin{bmatrix} \lambda 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para el segundo vector principal

$$(A - \lambda 2\ I) \begin{bmatrix} k12 \\ k22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{a1}{a2} - \lambda 2 & -\dfrac{a0}{a2} \\ 1 & -\lambda 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k12 \\ k22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k12 - \lambda 2\ k22 = 0$$

Si

$$k22 = 1$$

$$k12 = \lambda 2$$

El primer vector principal es

$$K2 = \begin{bmatrix} \lambda 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resulta que los vectores principales traen la combinación correcta de las constantes C1 y C3 así como entre C2 y C4 del sistema de ecuaciones diferenciales original.

Al hacer la combinación de las soluciones relativas a cada una de los valores principales (raíces) y vectores principales (combinación lineal de las constantes) se llega a la solución homogénea.

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = C1\ K1\ e^{\lambda 1\ t} + C2\ K2\ e^{\lambda 2\ t}$$

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = C1\ \begin{bmatrix} \lambda 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda 1\ t} + C2\ \begin{bmatrix} \lambda 2 \\ 1 \end{bmatrix}\ e^{\lambda 2\ t}$$

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = C1\ \begin{bmatrix} \lambda 1 e^{\lambda 1\ t} \\ e^{\lambda 1\ t} \end{bmatrix} + C2\ \begin{bmatrix} \lambda 2\ e^{\lambda 2\ t} \\ e^{\lambda 2\ t} \end{bmatrix}$$

De esta forma, las soluciones linealmente independientes, para ambas variables, son los vectores:

$$\mathrm{X1} = \begin{bmatrix} \lambda 1 e^{\lambda 1\ t} \\ e^{\lambda 1\ t} \end{bmatrix} = K1\ e^{\lambda 1\ t}$$

$$\mathrm{X2} = \begin{bmatrix} \lambda 2\ e^{\lambda 2\ t} \\ e^{\lambda 2\ t} \end{bmatrix} = K2\ e^{\lambda 2\ t}$$

A estas se les conoce como el conjunto fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales.

4.- Wronskiano

Para verificar que las soluciones sean linealmente independientes, se recurre a concepto del determinante Wronskiano. Ahora, en cada una de las columnas del determinante, se colocará de forma ordenada a las soluciones propuestas.

$$W(X1, X2) = Det\,[X1\ \ X2]$$

$$W(X1, X2) = Det \begin{bmatrix} \lambda 1 e^{\lambda 1\ t} & \lambda 2\ e^{\lambda 2\ t} \\ e^{\lambda 1\ t} & e^{\lambda 2\ t} \end{bmatrix}$$

$$W(X1, X2) = \lambda 1 e^{\lambda 1\ t} e^{\lambda 2\ t} - \lambda 2\ e^{\lambda 2\ t} e^{\lambda 1\ t}$$

$$W(X1, X2) = (\lambda 1 - \lambda 2)\ e^{(\lambda 1 + \lambda 2)t}$$

Para que las soluciones sean linealmente independientes, el determinante Wronskiano debe ser diferente de cero, por lo que mientras las raíces sean diferentes, esto se cumplirá.

Para los casos de los valores principales repetidos y los valores principales complejos, habrá que proceder con otro procedimiento.

A la matriz que se forma a partir de las soluciones en forma ordenada, sin considerar a las constantes indeterminadas, se le conoce como matriz fundamental

$$\Phi(\mathrm{t}) = [X1\ \ X2]$$

$$\Phi(\mathrm{t}) = \left[K1\ e^{\lambda 1\ t}\ \ K2\ e^{\lambda 2\ t}\right]$$

$$\Phi(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} k11\ e^{\lambda 1\ t} & k12\ e^{\lambda 2\ t} \\ k12\ e^{\lambda 1\ t} & k22\ e^{\lambda 2\ t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(\mathrm{t}) = \begin{bmatrix} k11 & k12 \\ k12 & k22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda 1\ t} \\ e^{\lambda 2\ t} \end{bmatrix}$$

Con la matriz fundamental, se puede construir la solución homogénea del sistema.

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k11\ e^{\lambda 1\ t} & k12\ e^{\lambda 2\ t} \\ k12\ e^{\lambda 1\ t} & k22\ e^{\lambda 2\ t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{qSol} = \Phi(\mathrm{t})\ \bar{C}$$

Al ser solución del sistema de ecuaciones, se puede introducir esta información en el sistema de ecuaciones diferenciales original

$$\bar{q}' = A\bar{q} + \bar{b}$$

$$\bar{q} = \Phi(\mathrm{t})\,\bar{C}$$

$$\bar{q}' = \Phi'(\mathrm{t})\,\bar{C}$$

Para la parte homogénea

$$\bar{q}\,' = A\bar{q}$$

$$\Phi'(\mathrm{t})\bar{C} = A\,\Phi(\mathrm{t})\,\bar{C}$$

$$\Phi'(\mathrm{t})\bar{C} - A\,\Phi(\mathrm{t})\bar{C} = \bar{0}$$

Esto se debe cumplir para cualquier constante, con lo que se tiene

$$\Phi'(\mathrm{t}) - A\,\Phi(\mathrm{t}) = \bar{0}$$

$$\Phi'(\mathrm{t}) = A\,\Phi(\mathrm{t})$$

Ya que el determinante Wronskiano eta definido a partir de las mismas soluciones, y es diferente de cero para asegurar la independencia lineal, esta matriz es no singular.

5.- Valores propios reales diferentes.

Con los valores principales reales diferentes, generan vectores principales distintos. De esta forma, la combinación lineal de los vectores principales y las funciones linealmente independientes directamente dará la solución homogénea.

Ejemplo 1. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo.

$$3\,x'(t) - 3\,x(t) - 9\,y(t) = 0$$

$$-10\,x(t) + 2\,y'(t) - 6\,y(t) = 0$$

Solución.

Transformando al sistema de ecuaciones a su forma matricial se tiene

$$x'(t) = x(t) + 3\,y(t)$$

$$y'(t) = 5\,x(t) + 3\,y(t)$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$Det(A - \lambda\, I) = 0$$

$$Det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 15 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda 1 = -2$$

$$\lambda 2 = 6$$

Para el primer valor principal

$$(A - \lambda 1\, I)K1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1+2 & 3 \\ 5 & 3+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k11 \\ k21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k11 + k21 = 0$$

Si

$$k11 = 1$$

$$k21 = -1$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para el segundo valor principal

$$(A - \lambda 2\, I)K2 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1-6 & 3 \\ 5 & 3-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k12 \\ k22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5\,k12 - 3k22 = 0$$

Si

$$k12 = 3$$

$$k22 = 5$$

$$K2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema homogéneo es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2\,t} + C2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6\,t}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C1 \begin{bmatrix} e^{-2\,t} \\ -e^{-2\,t} \end{bmatrix} + C2 \begin{bmatrix} 3e^{6\,t} \\ 5e^{6\,t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2\,t} & 3e^{6\,t} \\ -e^{-2\,t} & 5e^{6\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2\,t} \\ e^{6\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k11 & k12 \\ k21 & k22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda 1\, t} \\ e^{\lambda 2\, t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

Con los valores reales distintos, de los vectores principales asociados a las funciones de cada uno de los valores principales genera el conjunto fundamental de soluciones. Al hacer la combinación lineal de dichas soluciones se obtiene la solución homogénea del sistema.

6.- Valores propios reales repetidos

Cuando aparecen valores reales repetidos, las funciones linealmente independientes asociadas a cada valor dejarían de ser linealmente independientes. Se tendrían que generar n vectores linealmente independientes y cada una de las funciones hacerla linealmente independiente de la anterior.

a) Si con un valor repetido n veces se pueden encontrar n vectores linealmente independientes, la solución será la combinación de la misma función con los vectores independientes.

Ejemplo 2. Sea el sistema de ecuaciones

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} X(t)$$

Para el vector

$$X(t) = \begin{bmatrix} x1(t) \\ x2(t) \\ x3(t) \end{bmatrix}$$

Determine la solución del sistema de ecuaciones.

Solución.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda\, I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$Det(A - \lambda\, I) = 0$$

$$-(-5+\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda 1 = -1$$

$$\lambda 2 = -1$$

$$\lambda 3 = 5$$

Con el valor primer valor principal

$$\begin{bmatrix} 1+1 & -2 & 2 \\ -2 & 1+1 & -2 \\ 2 & -2 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k11 \\ k21 \\ k31 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$k11 - k21 + k31 = 0$$

Asignando un primer juego de valores se obtiene el primer vector principal

$$k21 = 1, \qquad k31 = 1, \qquad k11 = 0$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con otro juego de valores, se puede obtener otro vector principal

$$k21 = 1, \qquad k31 = 0, \qquad k11 = 1$$

$$K2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ambos linealmente independientes.

Para el último valor se tiene

$$\begin{bmatrix} 1-5 & -2 & 2 \\ -2 & 1-5 & -2 \\ 2 & -2 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k13 \\ k23 \\ k33 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$k13 - k33 = 0$$

$$k23 + k33 = 0$$

Sólo permite generar un vector principal.

$$k13 = 1, \qquad k33 = 1, \qquad k23 = -1$$

$$K3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Generando la solución

$$\mathrm{X(t)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

b) si el valor principal de multiplicidad n solamente tiene un vector propio, las soluciones se construyen a partir de nuevos vectores independientes.

Para la primera solución se tiene

$$X1 = K\, e^{\lambda\, t}$$

Para la segunda solución

$$X2 = K\, t\, e^{\lambda\, t} + P\, e^{\lambda\, t}$$

Para la tercera solución

$$X3 = K\, \frac{t^2}{2}\, e^{\lambda\, t} + P\, t\, e^{\lambda\, t} + Q\, e^{\lambda\, t}$$

Hasta la n solución asociada al n valor repetido

$$Xn = K\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{\lambda\, t} + P\, \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\, e^{\lambda\, t} + \cdots + Kn\, e^{\lambda\, t}$$

Para resolver la primer repetición, como $X2$ es solución de la parte homogénea

$$X2 = K\, t\, e^{\lambda\, t} + P\, e^{\lambda\, t}$$

$$X2'(t) = A\, X2(t)$$

$$K\, \lambda\, t\, e^{\lambda\, t} + K\, e^{\lambda\, t} + P\, \lambda\, e^{\lambda\, t} = A\left(K\, t\, e^{\lambda\, t} + P\, e^{\lambda\, t}\right)$$

Reagrupando

$$A\, K\, t\, e^{\lambda t} - K\, \lambda\, t\, e^{\lambda t} - K\, e^{\lambda t} - P\, \lambda\, e^{\lambda t} + A\, P\, e^{\lambda\, t} = \bar{0}$$

$$(A\, K - K\, \lambda)\, t\, e^{\lambda\, t} + (A\, P - K - P\, \lambda)e^{\lambda\, t} = \bar{0}$$

Generando el sistema de ecuaciones

$$(A - \lambda\, I\,)K = \bar{0}$$

$$(A - \lambda\, I\,)P = K$$

Siendo la primer ecuación la definición del primer vector principal y la segunda ecuación la que genera a un vector linealmente independiente con respecto al primero.

Si se tienen tres repeticiones

$$X3 = K\, \frac{t^2}{2}\, e^{\lambda\, t} + P\, t\, e^{\lambda\, t} + Q\, e^{\lambda\, t}$$

$$X3'(t) = A\, X3(t)$$

$$K\ \ t\, e^{\lambda\, t} + K\, \lambda \frac{t^2}{2}\, e^{\lambda\, t} + P\, e^{\lambda\, t} + P\, \lambda\, t\, e^{\lambda\, t} + Q\, \lambda\, e^{\lambda\, t} = A\left(K\, \frac{t^2}{2}\, e^{\lambda\, t} + P\, t\, e^{\lambda\, t} + Q\, e^{\lambda\, t}\right)$$

Reagrupando

$$-K\ \ t\, e^{\lambda\, t} - K\, \lambda \frac{t^2}{2} e^{\lambda\, t} - P\, e^{\lambda\, t} - P\, \lambda\, te^{\lambda\, t} - Q\, \lambda\, e^{\lambda\, t} + A\, K\, \frac{t^2}{2} e^{\lambda\, t} + A\, P\, te^{\lambda\, t} + A\, Q\, e^{\lambda\, t} = 0$$

$$(A\, K - K\, \lambda\,)\frac{t^2}{2}\, e^{\lambda\, t} + (A\, P - K - P\, \lambda)t\, e^{\lambda\, t} + (A\, Q - P - Q\, \lambda)e^{\lambda\, t} = \bar{0}$$

Generando el sistema de ecuaciones

$$(A - \lambda\, I\,)K = \bar{0}$$

$$(A - \lambda\, I\,)P = K$$

$$(A - \lambda\, I)Q = P$$

Y así, sucesivamente.

Ejemplo 3. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$x'(t) = 3x - y - z$$

$$y'(t) = x + y - z$$

$$z'(t) = x - y + z$$

Solución.

Transformando el sistema a su forma matricial

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$$

Los valores principales son

$$\lambda 1 = 1$$

$$\lambda 2 = 2$$

$$\lambda 3 = 2$$

Con estos valores principales se obtienen los vectores

$$K1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$K21 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$K22 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Al poder generar dos vectores independientes del valor repetido, se tiene

$$X1 = K1e^{\lambda 1\ t}$$

$$X2 = K21\ e^{\lambda 2\ t}$$

$$X3 = K22\ e^{\lambda 2\ t}$$

Quedando la solución

$$X = C1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{\ t} + C2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}e^{2\ t} + C3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}e^{2\ t}$$

Ejemplo 4. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$X' = \begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\0 & 4 & 1\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}X$$

Los valores principales son

$$\lambda 1 = 4$$

$$\lambda 2 = 4$$

$$\lambda 3 = 4$$

Sólo se puede obtener un vector principal.

$$(A\ -\ \lambda\, I\ )K = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix}4-4 & 1 & 0\\0 & 4-4 & 1\\0 & 0 & 4-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k1\\k2\\k3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k1\\k2\\k3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Para los demás vectores, se realiza el sistema de ecuaciones

$$(A\ -\ \lambda\, I\ )P = K$$

$$\begin{bmatrix}4-4 & 1 & 0\\0 & 4-4 & 1\\0 & 0 & 4-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p1\\p2\\p3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p1\\p2\\p3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$p3 = 0, \qquad p2 = 1, \qquad p1 = 1$$

$$P = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

Y para el tercero

$$(A\ -\ \lambda\, I\ )Q = P$$

$$\begin{bmatrix}4-4 & 1 & 0\\0 & 4-4 & 1\\0 & 0 & 4-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q1\\q2\\q3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q1\\q2\\q3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$q3 = 1, \qquad q2 = 1, \qquad q1 = 1$$

$$Q = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Encontrando las soluciones independientes

$$X1 = K\ e^{\lambda 1\ t}$$

$$X2 = K\ t\, e^{\lambda 2\ t} + Pe^{\lambda 2\ t}$$

$$X3 = K\ \frac{t^2}{2}e^{\lambda 2\ t} + P\ t\ e^{\lambda 2\ t} + Q\,e^{\lambda 2\ t}$$

Quedando la solución

$$X = C1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}e^{4\ t} + C2\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)e^{4\ t} + C3\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}t + \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)e^{4\ t}$$

7. Valores propios imaginarios conjugados.

En ocasiones, los valores propios de la matriz serán imaginarios, ocasionando que los vectores principales también sean complejos. Estos valores aparecerán de forma conjugada.

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

Si

$$(a11 - \lambda)(a22 - \lambda) - a12\, a21 = 0$$

y

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i$$

Para el primer valor

$$(A - \lambda 1\, I)K1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} a11 - \alpha - \beta\, i & a12 \\ a21 & a22 - \alpha - \beta\, i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k11 \\ k21 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$k11(a11 - \alpha - \beta\, i) + a12\, k21 = 0$$

Si

$$k11 = 1, \qquad k21 = \frac{(-a11 + \alpha + \beta\, i)}{a12}$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(-a11 + \alpha + \beta\, i)}{a12} \end{bmatrix}$$

Para el segundo valor

$$(A - \lambda 2\, I)K2 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} a11 - \alpha + \beta\, i & a12 \\ a21 & a22 - \alpha + \beta\, i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k12 \\ k22 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$k12(a11 - \alpha + \beta\, i) + a12\, k22 = 0$$

Si

$$k12 = 1, \qquad k22 = \frac{(-a11 + \alpha - \beta\, i)}{a12}$$

$$K2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{(-a11 + \alpha - \beta\, i)}{a12} \end{bmatrix}$$

Como los valores principales fueron conjugados, los vectores principales también serán conjugados.

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$$

$$K1 = \overline{K2}$$

Una forma de presentar la solución es con el sistema principal con valores y vectores imaginarios conjugados.

$$X1 = K1\, e^{(\alpha + \beta i)t}$$

$$X2 = K2\, e^{(\alpha - \beta i)t} = \overline{K1} e^{\overline{(\alpha + \beta i)}t}$$

Siendo la solución

$$Xh = C1\, X1 + C2\, X2$$

$$Xh = C1\, K1\, e^{(\alpha + \beta i)t} + C2\, K2\, e^{(\alpha - \beta i)t}$$

Aunque se puede dar como solución a la anterior combinación, ésta requiere de constantes complejas C1 y C2. Por ello se prefiere cambiar a la forma en constantes reales, vectores reales y funciones seno y coseno, como ocurrió con las raíces imaginarias.

$$X1 = K1\, e^{(\alpha + \beta i)t} = K1 e^{\alpha\, t} e^{\beta i\, t}$$

$$X2 = \overline{K1}\, e^{\overline{(\alpha + \beta i)}t} = \overline{K1} e^{\alpha\, t} e^{-\beta i\, t}$$

$$X1 = K1 e^{\alpha\, t}(\cos \beta\, t + i \sin \beta\, t)$$

$$X2 = \overline{K1} e^{\alpha\, t}(\cos \beta\, t - i \sin \beta\, t)$$

Sumando las soluciones

$$\mathrm{X1} + \mathrm{X2} = K1 e^{\alpha\, t}(\cos \beta\, t + i \sin \beta\, t) + \overline{K1} e^{\alpha\, t}(\cos \beta\, t - i \sin \beta\, t)$$

$$\mathrm{X1} + \mathrm{X2} = (K1 + \overline{K1}) e^{\alpha\, t} \cos \beta\, t + i(K1 - \overline{K1})\, e^{\alpha\, t} \sin \beta\, t$$

Restando las soluciones y multiplicando por el imaginario i

$$\mathrm{X1} - \mathrm{X2} = K1 e^{\alpha\, t}(\cos \beta\, t + i \sin \beta\, t) - \overline{K1} e^{\alpha\, t}(\cos \beta\, t - i \sin \beta\, t)$$

$$\mathrm{X1} - \mathrm{X2} = (K1 - \overline{K1}) e^{\alpha\, t} \cos \beta\, t + i(K1 + \overline{K1})\, e^{\alpha\, t} \sin \beta\, t$$

$$i(\mathrm{X1} - \mathrm{X2}) = i\big(K1 - \overline{K1}\big) e^{\alpha\, t} \cos \beta\, t - (K1 + \overline{K1})\, e^{\alpha\, t} \sin \beta\, t$$

A partir de la suma y diferencia de los conjugados, se puede obtener la parte real y la parte imaginaria, quedando únicamente vectores con coeficientes reales.

$$B1 = \frac{1}{2}\left(K1 + \overline{K1}\right), \qquad B1 = Re[K1]$$

$$B2 = \frac{i}{2}\left(K1 - \overline{K1}\right), \qquad B2 = -Im[K1]$$

Las nuevas soluciones linealmente independientes quedan

$$X1n = e^{\alpha t}\left(B1 \cos\beta\ t\ + B2 \sin\beta\ t\right)$$

$$X2n = e^{\alpha t}\left(B2 \cos\beta\ t\ - B1 \sin\beta\ t\right)$$

Ejercicio 5. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$x'(t) = 6\,x(t) - y(t)$$

$$y'(t) = 5\,x(t) + 2\,y(t)$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$Det(A - \lambda\, I) = 0$$

$$Det\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda 1 = 4 + i$$

$$\lambda 2 = 4 - i$$

Para el primer valor principal

$$(A - \lambda 1\, I)K1 = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 6-4-i & -1 \\ 5 & 2-4-i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k11 \\ k21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$5\,k11 + (-2-i)k21 = 0$$

Si

$$k21 = 5$$

$$k11 = 2 + i$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 2+i \\ 5 \end{bmatrix}$$

Con el otro valor se obtendría el vector conjugado

$$B1 = \frac{1}{2}\left(K1 + \overline{K1}\right), \qquad B1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$B2 = \frac{i}{2}\left(K1 - \overline{K1}\right), \qquad B2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con los desarrollos anteriores se tiene

$$X1n = e^{\alpha t}\left(B1 \cos\beta\ t\ + B2 \sin\beta\ t\right)$$

$$X2n = e^{\alpha t}\left(B2 \cos\beta\ t\ - B1 \sin\beta\ t\right)$$

Con las soluciones linealmente independientes

$$X1n = e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\cos\beta\ t\ + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin\beta\ t\right)$$

$$X2n = e^{4t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos\beta\ t\ - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\sin\beta\ t\right)$$

Y de su combinación lineal se obtiene la solución homogénea.

$$Xh = C1\ e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\cos\beta\ t\ + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\sin\beta\ t\right) + C2e^{4t}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\cos\beta\ t - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\sin\beta\ t\right)$$

8.- Parte no homogénea

Similar al procedimiento que se ocupó para obtener la solución en una ecuación lineal de primer orden, ahora se ocupará la información contenida en los valores principales y los vectores principales para obtener la solución al sistema de ecuaciones no homogéneo.

$$x' = P\ x + g(t)$$

De la solución de la ecuación diferencial lineal de primer

$$x = e^{\int P\,dt}\int e^{-\int P\,dt}\ g(t)dt + C1e^{\int P\,dt}$$

Se observa que las características del sistema venían en el polinomio P, a partir del cual se desarrolló dicha solución. Ahora tomando en cuenta a que la información de las raíces del sistema de ecuaciones y sus combinaciones está dada por la matriz fundamental, se tiene el siguiente desarrollo.

Sea

$$X' = AX + F(t)$$

Con una matriz fundamental

$$\Phi(\text{t}) = [X1 \;\; X2 \;\; \cdots]$$

La solución homogénea está dada por

$$XSol = \Phi(\text{t})\, \bar{C}$$

Ahora se buscará un vector de funciones $U(t)$ tal que

$$U(t) = \begin{bmatrix} u1(t) \\ u2(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$Xp = \Phi(\text{t})\; U(t)$$

Donde Xp es una solución del sistema no homogéneo, similar al método de variación de parámetros.

$$X' = AX + F(t)$$

$$Xp' = \Phi'(\text{t})U(t) + \Phi(\text{t})\; U'(t) + F(t)$$

$$\Phi'(\text{t})U(t) + \Phi(\text{t})U'(t) = A\;\Phi(\text{t})U(t) + F(t)$$

Como

$$\Phi'(\text{t}) = A\;\Phi(\text{t})$$

El sistema queda

$$A\;\Phi(\text{t})U(t) + \Phi(\text{t})U'(t) = A\;\Phi(\text{t})U(t) + F(t)$$

$$\Phi(\text{t})U'(t) = F(t)$$

Como la matriz fundamental propuesta es no singular, en lugar de pasar dividiendo, se utiliza su inversa para obtener.

$$U'(t) = \Phi^{-1}(\text{t})F(t)$$

Integrando

$$U(t) = \int \Phi^{-1}(\text{t})F(t)\;\, dt + \bar{C}$$

Obteniendo la solución del sistema de ecuaciones

$$XSol = \Phi(\text{t})\,U(t)$$

$$XSol = Xp + Xh$$

$$XSol = \Phi(\text{t})\,\bar{C} + \Phi(\text{t})\int \Phi^{-1}(\text{t})F(t)\;\, dt$$

Ejemplo 6. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}$$

Solución

Identificando a la matriz A y encontrando sus valores principales y vectores principales

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Det(A - \lambda\, I) = 0$$

$$(-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda 1 = 1$$

$$\lambda 2 = 2$$

Obteniendo los vectores principales

$$(A - \lambda 1\, I)\begin{bmatrix} k11 \\ k21 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 2 \\ -1 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k11 \\ k21 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$-k11 + 2\,k21 = 0$$

$$K1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda 2\, I)\begin{bmatrix} k12 \\ k22 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 2 \\ -1 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k12 \\ k22 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$-k12 + \;k22 = 0$$

$$K2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz fundamental queda

$$\Phi(\text{t}) = [X1\; X2]$$

$$\Phi(\text{t}) = \begin{bmatrix} 2e^{t} & 1e^{2t} \\ 1e^{t} & 1e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(\text{t}) = \frac{1}{e^{3t}}\begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{2t} \\ -e^{t} & 2e^{t} \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1}(\text{t}) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Calculando la integral

$$U(t) = \int \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{t}\, dt$$

$$= \int \begin{bmatrix} 2 \\ -3e^{-t} \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 2t \\ 3e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

Y realizando la multiplicación

$$XSol = \Phi(\mathrm{t})\, U(t)$$

$$XSol = \begin{bmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ 3e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

$$XSol = C1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$XSol = C1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 4te^{t} + 3e^{t} \\ 2te^{t} + 3e^{t} \end{bmatrix}$$

Ahora solamente falta introducir las condiciones iniciales, para obtener el valor de las constantes indeterminadas.