Crecimiento poblacional y modelado no lineal

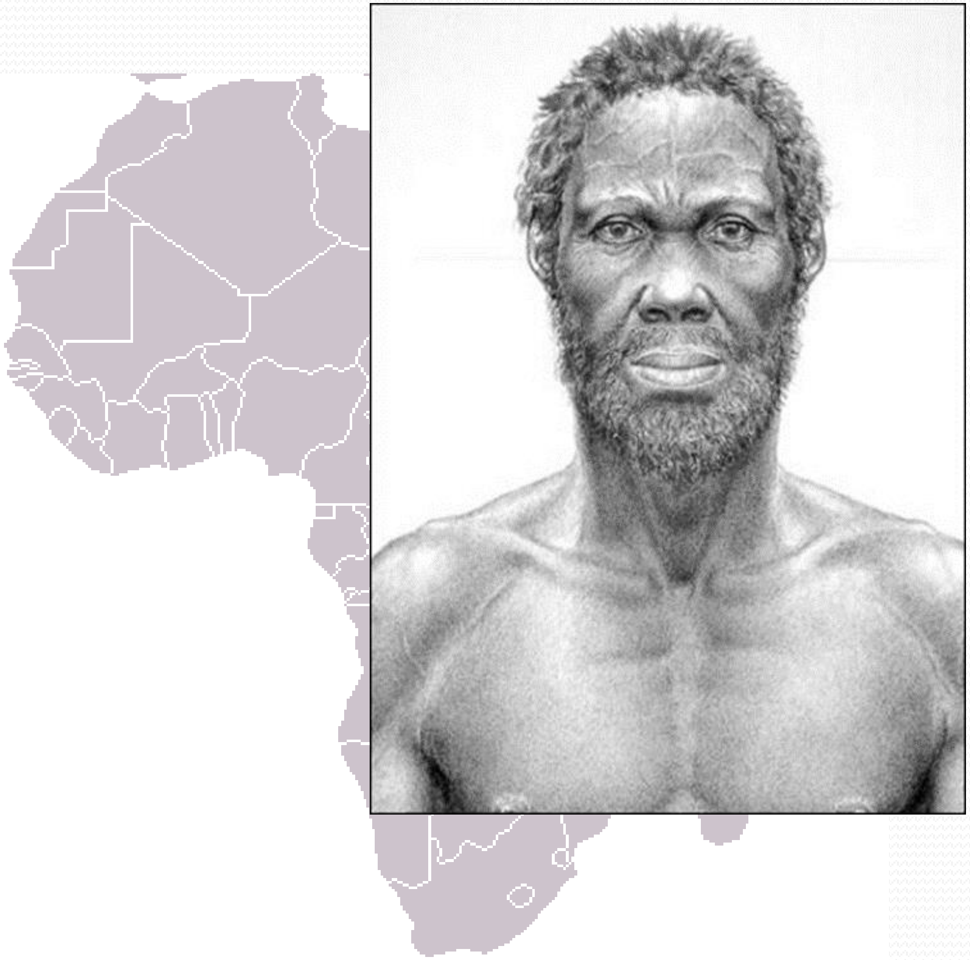
M. I. Yahvé Abdul Ledezma Rubio

Temario

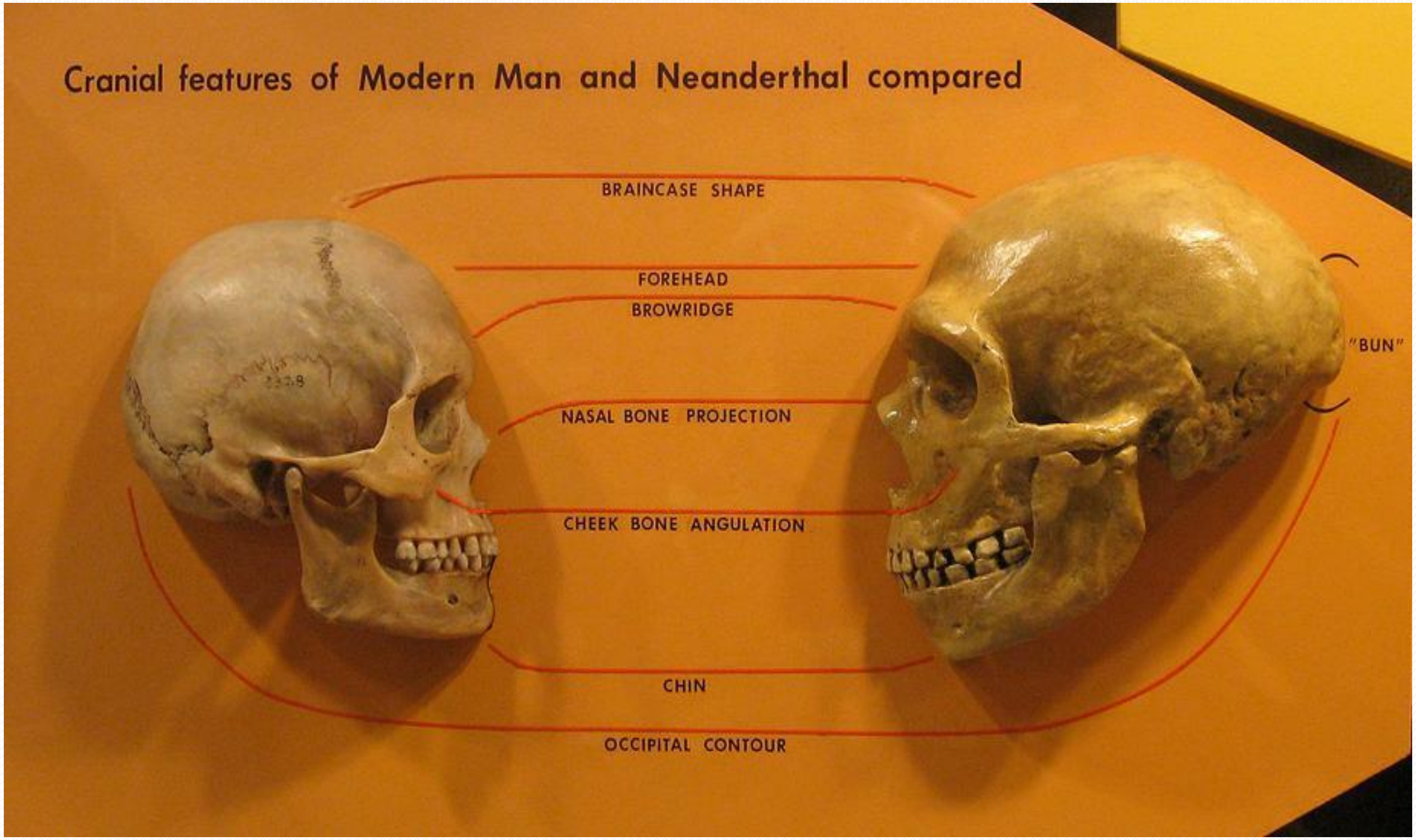
1. Crecimiento de una población
2. Crecimiento exponencial
3. Problema de Malthus.
4. Curva logística
5. Modelos no lineales

Crecimiento de una población

- Aproximadamente hace 156000 años se supone un origen común en el cromosoma Y (masculino). Simultáneamente, hace unos 140000 años se supone un origen común dentro del genoma del ARN mitocondrial (femenino). Se ambas fuentes iniciales descienden todo el Homo Sapiens [1]

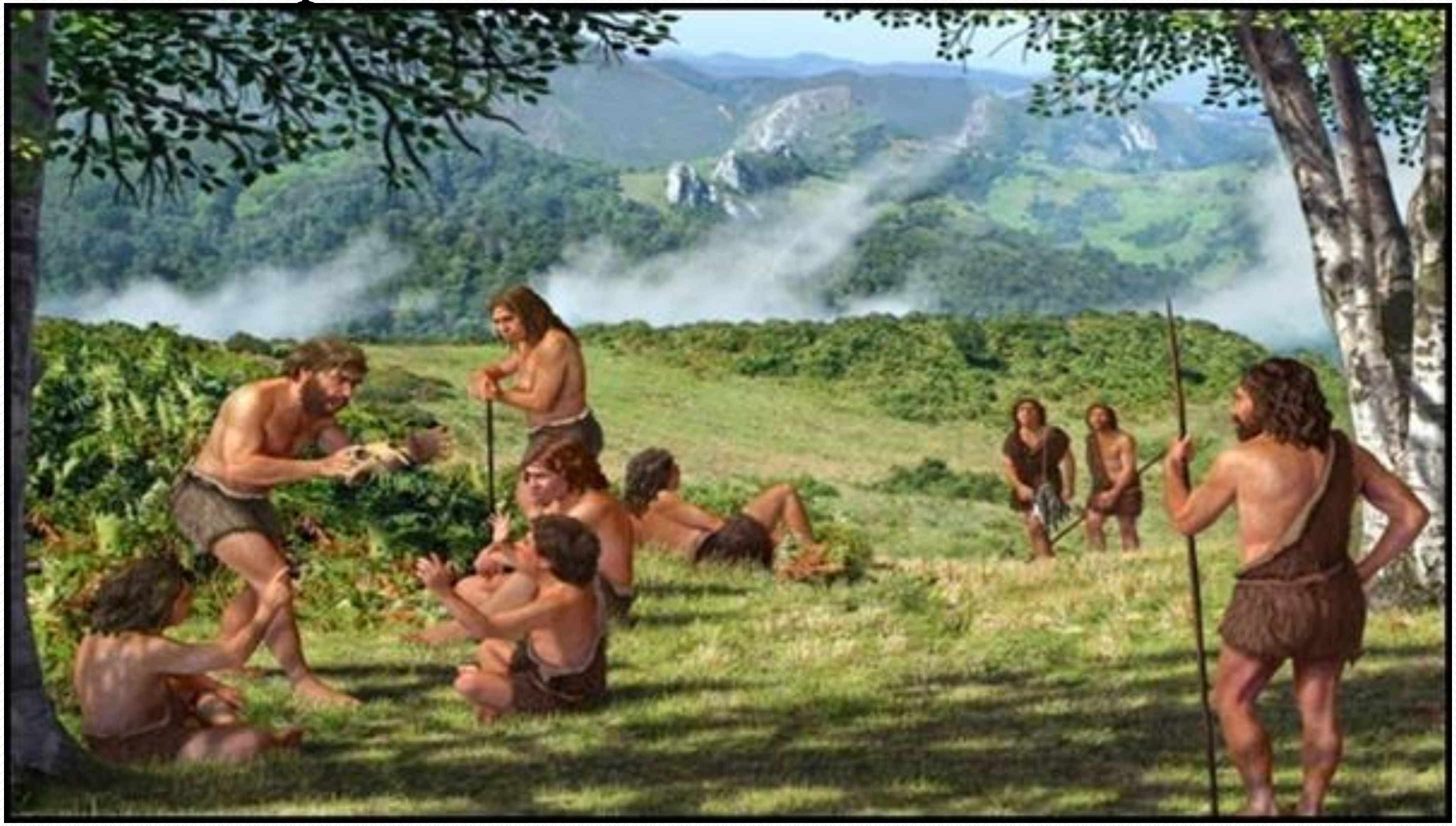


- Al mismo tiempo, competían por el medio otras especies del género Homo, siendo la rama que sobrevivió.

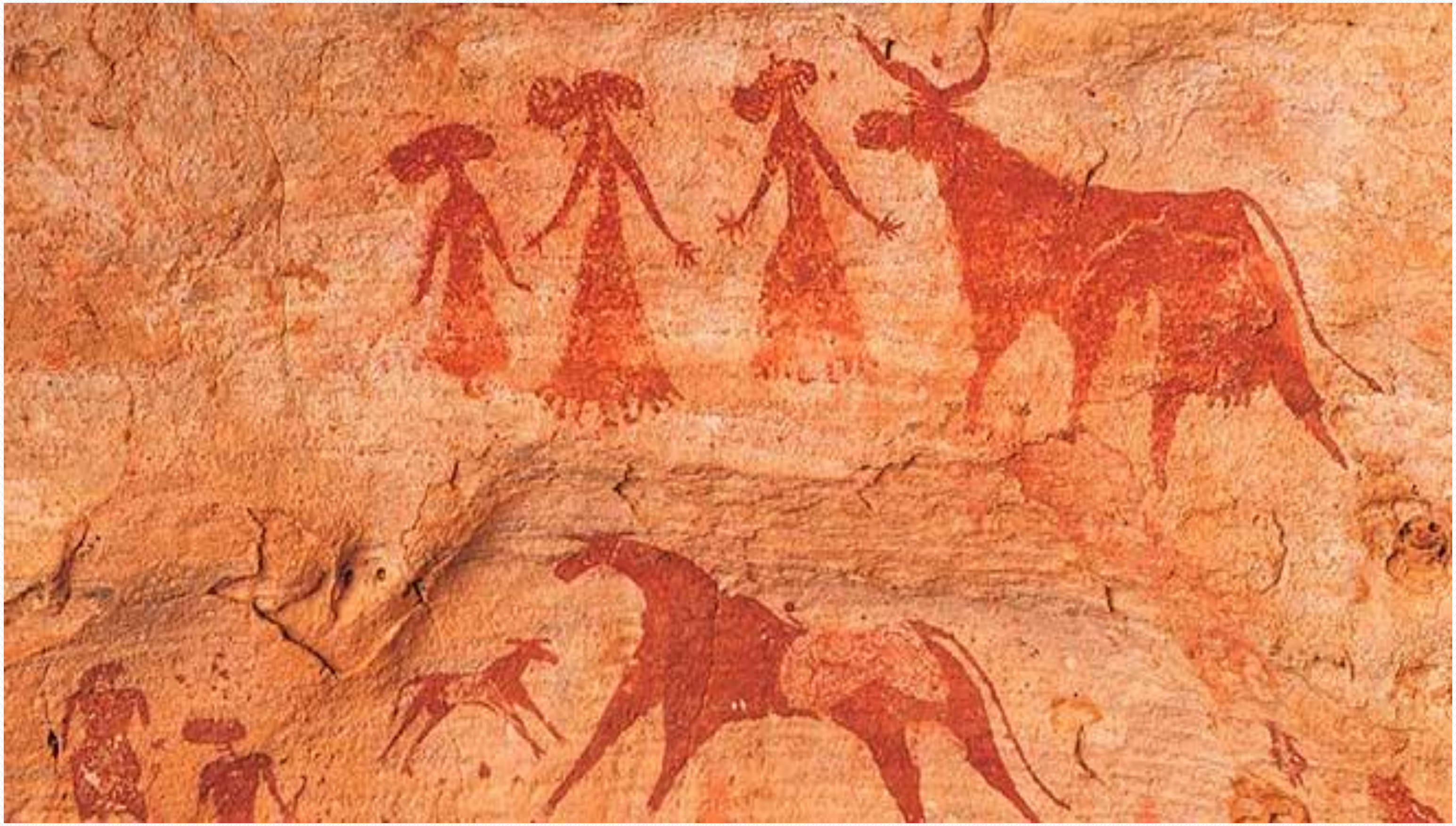

Cranial features of Modern Man and Neanderthal compared
BRAINCASE SHAPE
FOREHEAD
BROWRIDGE
NASAL BONE PROJECTION
CHEEK BONE ANGULATION
CHIN
OCCIPITAL CONTOUR
"BUN"

- A partir este punto, se lleva la expansión de la especie por el planeta.

En el paleolítico (piedra antigua) ésta presión sobre el medio ambiente no se notaba por el comportamiento nómada de la población.



- Vivían en las cavernas o cuevas.
- Eran recolectores, cazadores y pescadores.
- Se cubrían el cuerpo con la piel de los animales que cazaban.
- Talla de piedra, huesos y madera.
- Eran nómades o errantes.
- Descubren el fuego.
- Organizados en Clanes.
- Ejecutan obras de arte rupestre. [3]



La población humana se mantenía estable, con muchos nacimientos desde edades tempranas, pero también muchas muertes antes de la edad adulta, debido a problemas de salud o accidentes.

Crecimiento poblacional

- Natalidad. Número de nacimientos totales en cierta región por unidad de tiempo.
- Mortalidad: Número de muertes totales en cierta región por unidad de tiempo.
- Tasa de Natalidad: Número de nacimientos por año respecto al total de la población en tanto por 1000 (‰)
- Tasa de mortalidad: Número de muertes por año respecto al total de la población en tanto por 1000 (‰)

.

Crecimiento poblacional

- Crecimiento poblacional:

$$\frac{(natalidad - \ mortalidad) \ + \ (inmigración - emigración)}{tf - ti}$$

- Tasa de crecimiento poblacional

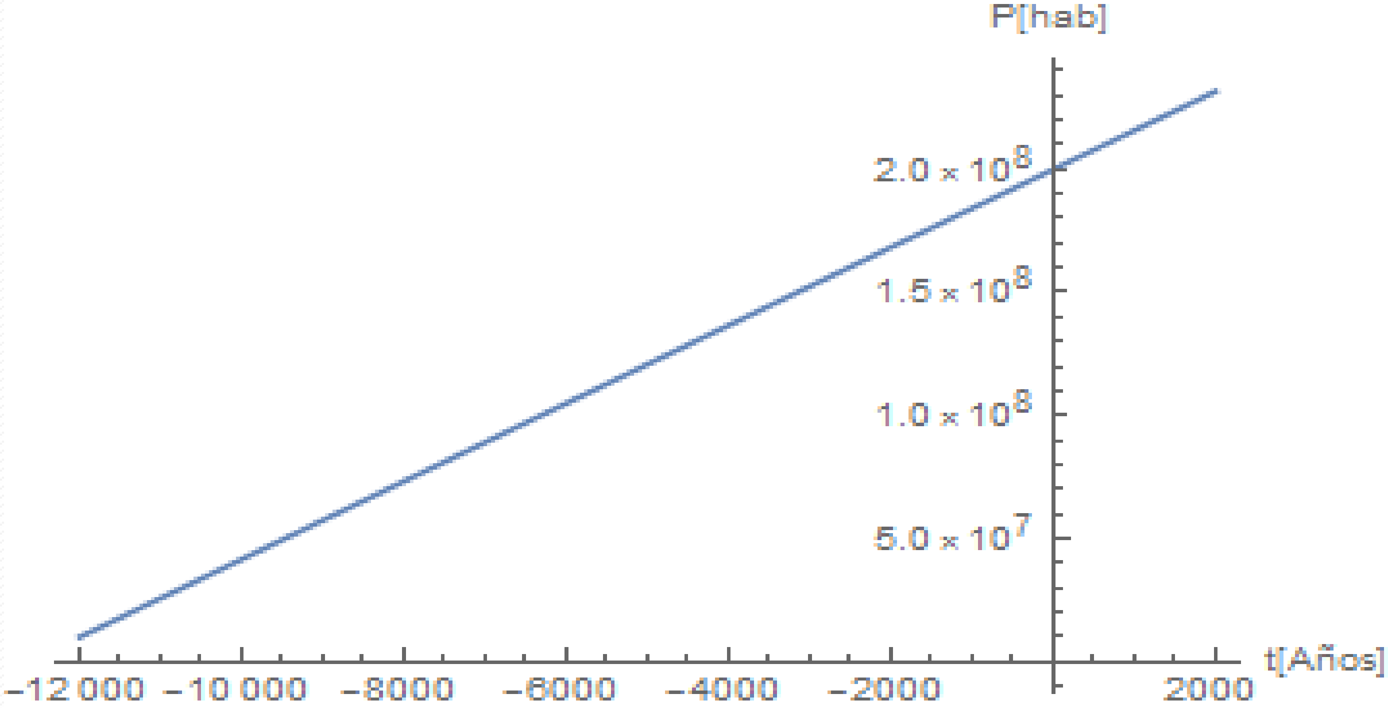
$$PGR = \frac{Ln\big(P(t2)\big) - Ln(P(t1))}{t2 - t1}$$

¿Crecimiento aritmético o geométrico?

- 10000 AC se la humanidad se empieza a establecer en poblados, con un estimado de 10 millones de individuos [4]
- Hace 2000 años, la población mundial se estima en 200 millones de habitantes [4]

Utilizando un modelo lineal, determine el crecimiento de la población en dicho periodo.

$$\frac{P(tf)-P(ti)}{tf-ti}=\frac{P(t)-P(ti)}{t-ti}$$



$$P(t)=15833.3\,t+200000000$$

Mismos datos, otra visión

Si el crecimiento poblacional es proporcional a la población en un instante, determine constante de proporcionalidad.

- 10000 AC se la humanidad se empieza a establecer en poblados, con un estimado de 10 millones de individuos [4]
- Hace 2000 años, la población mundial se estima en 200 millones de habitantes [4]

$$\frac{dP(t)}{dt} \propto \mathrm{P(t)}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mathrm{k\,P(t)}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} - \mathrm{k\,P(t)} = 0$$

$$\lambda - k = 0$$

$$\lambda = k$$

$$P(t) = C1\, e^{k\,t}$$

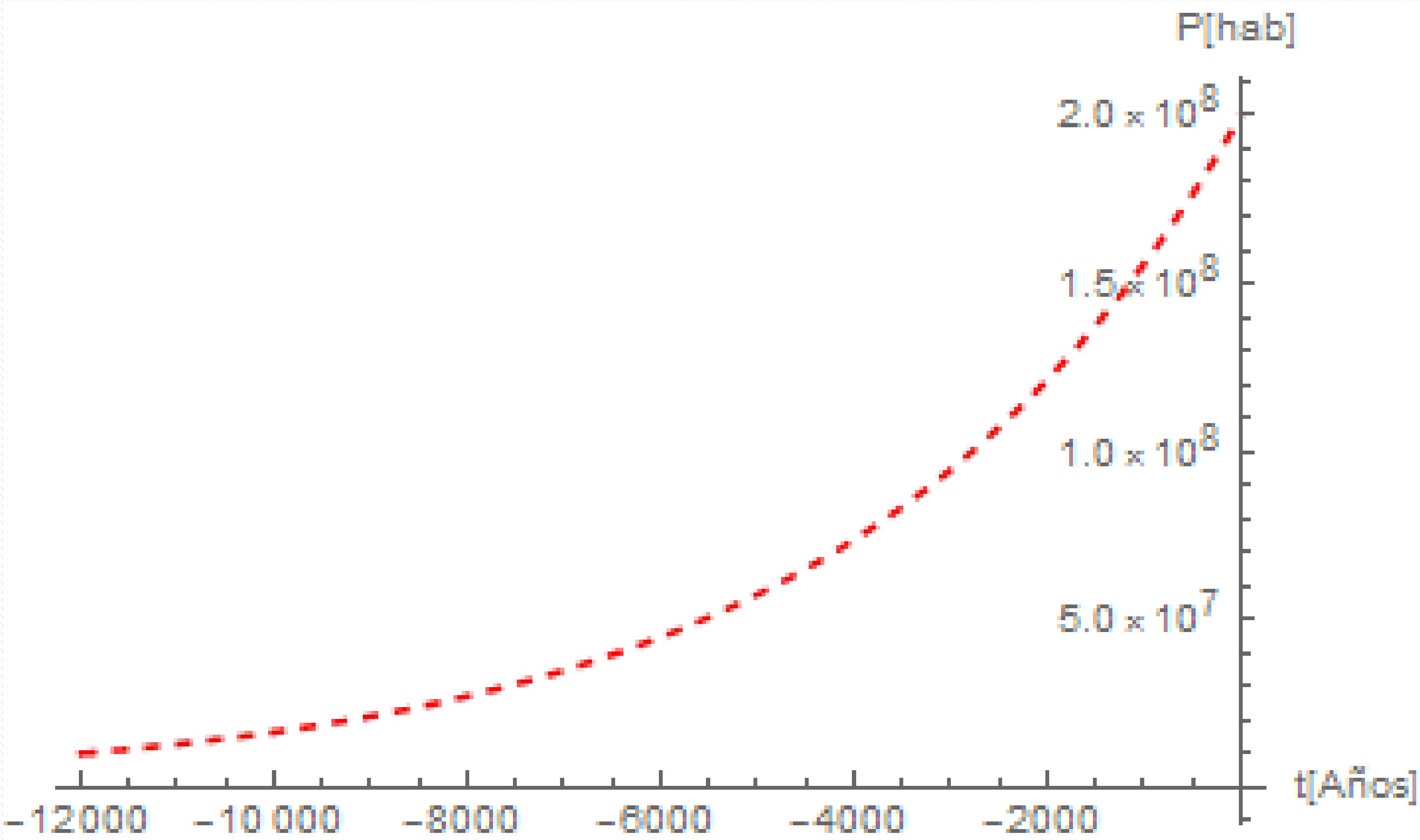
$$P(t) = C1\, e^{k\,t}$$

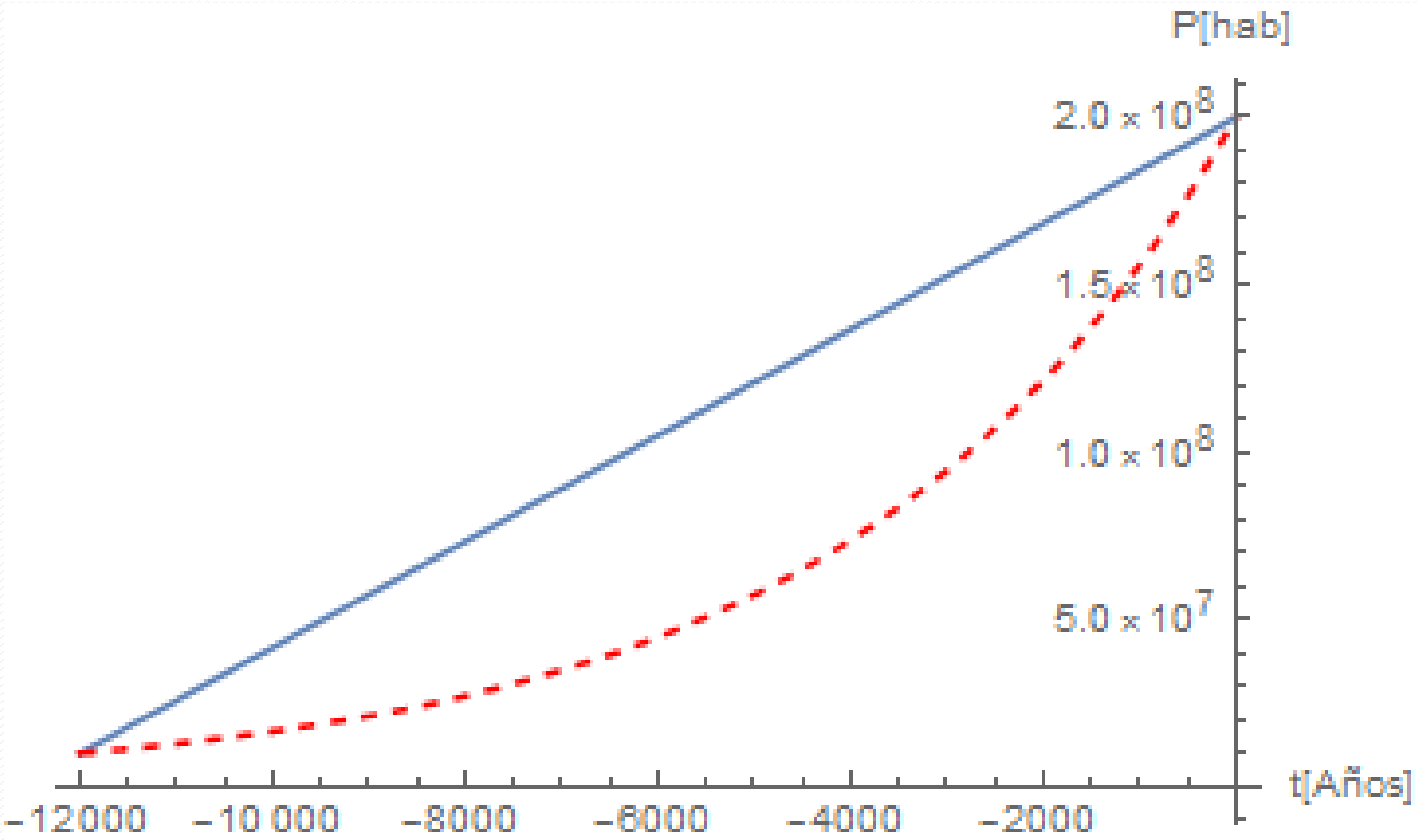
$$C1 = 200\,000\,000$$

$$k = 0.000249$$

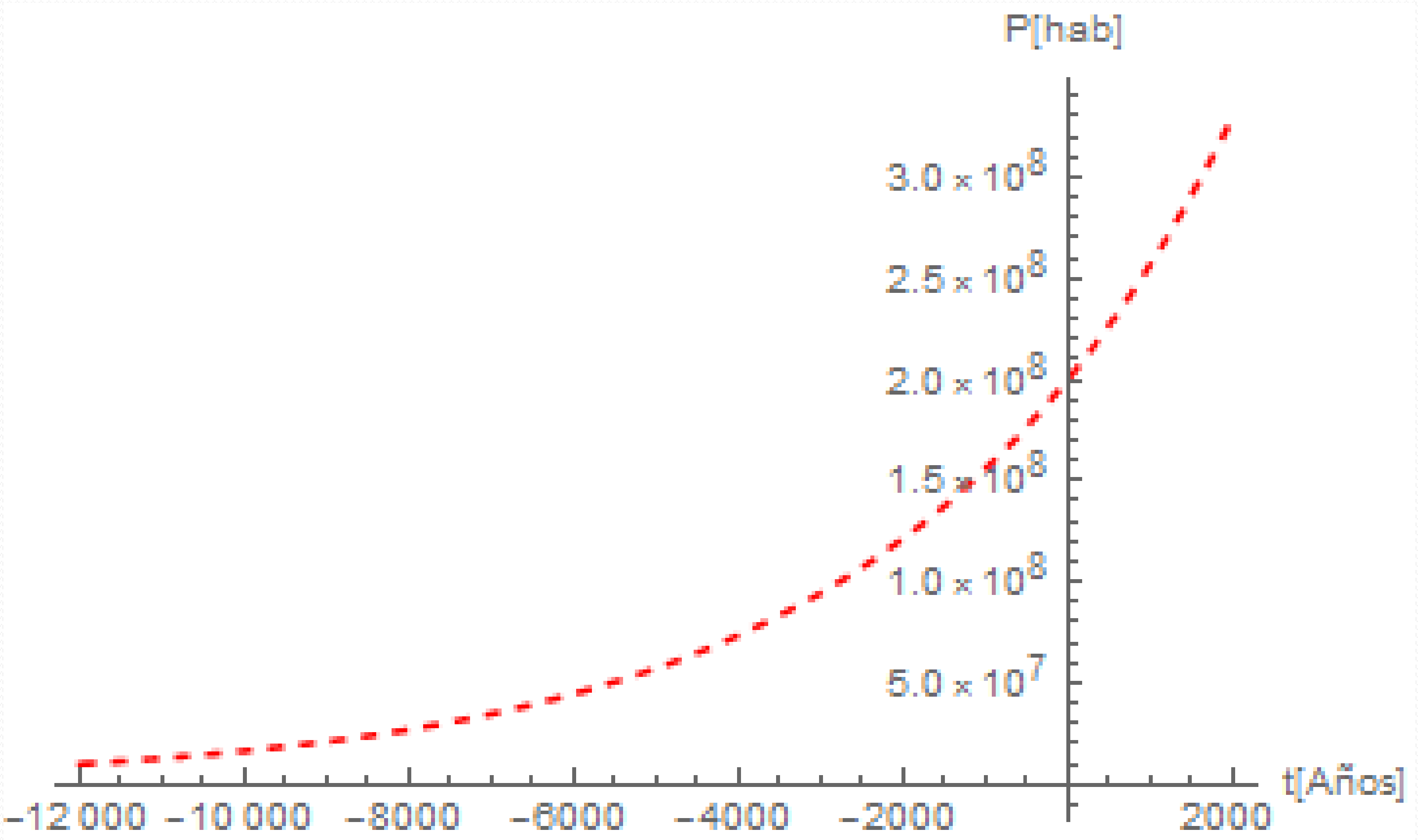
$$P(t) = 200 \times 10^6 e^{0.000249t}$$

$$P(t) = 200 \times 10^6 e^{0.000249t}$$





P[hab]
2.0 × 10^8
1.5 × 10^8
1.0 × 10^8
5.0 × 10^7
t[Años]
−12000
−10 000
−8000
−6000
−4000
−2000


P[hab]
3.0 × 10^8
2.5 × 10^8
2.0 × 10^8
1.5 × 10^8
1.0 × 10^8
5.0 × 10^7
t[Años]
−12 000
−10 000
−8000
−6000
−4000
−2000
2000

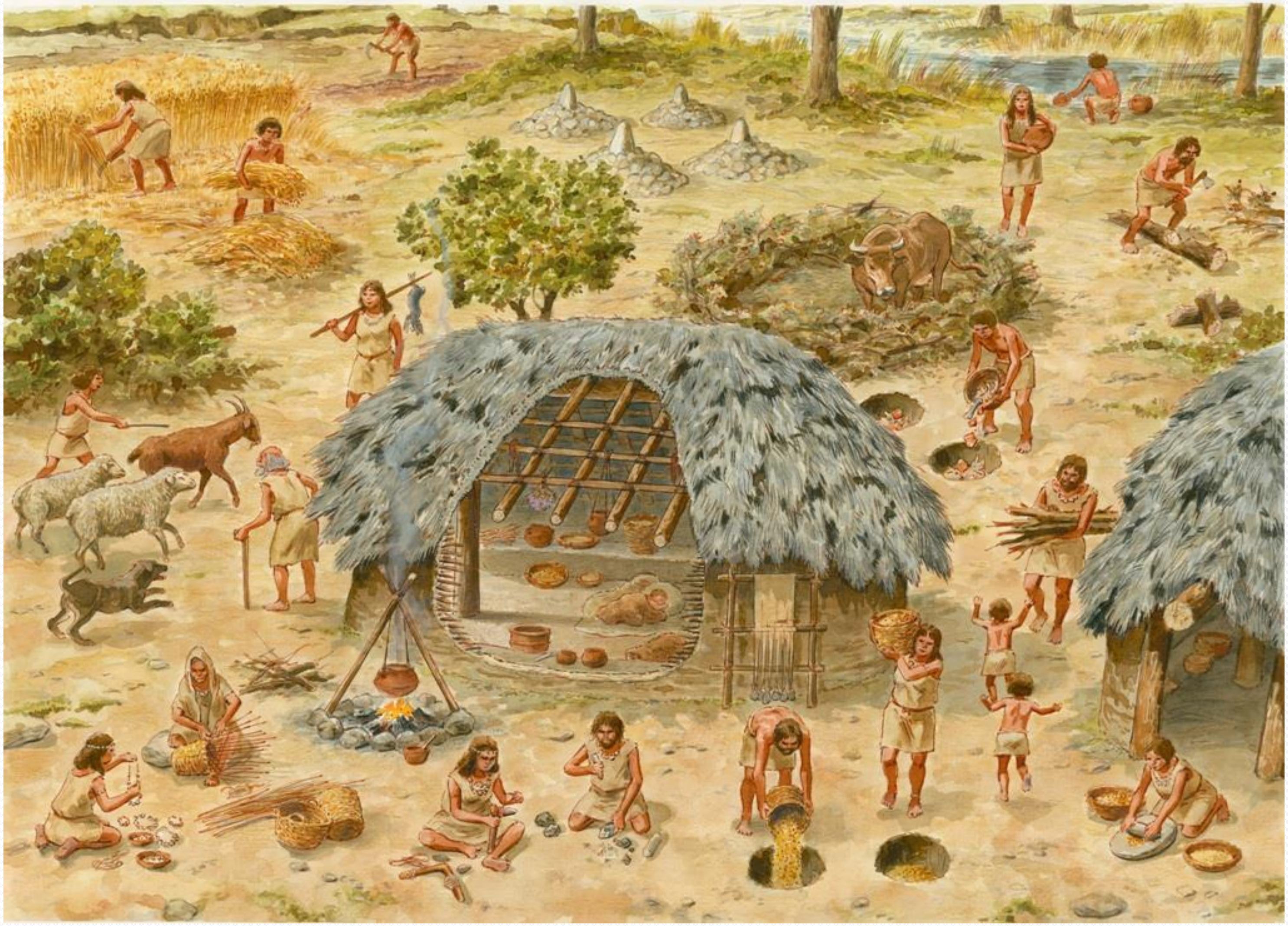
- Pero esta constante de proporcionalidad era de valor distinto en el Paleolítico al Neolítico

$$\text{kPaleolítico} = 0.0000274117$$

$$kNeolítico = 0.000249676$$

¿Algo cambió en el crecimiento poblacional?

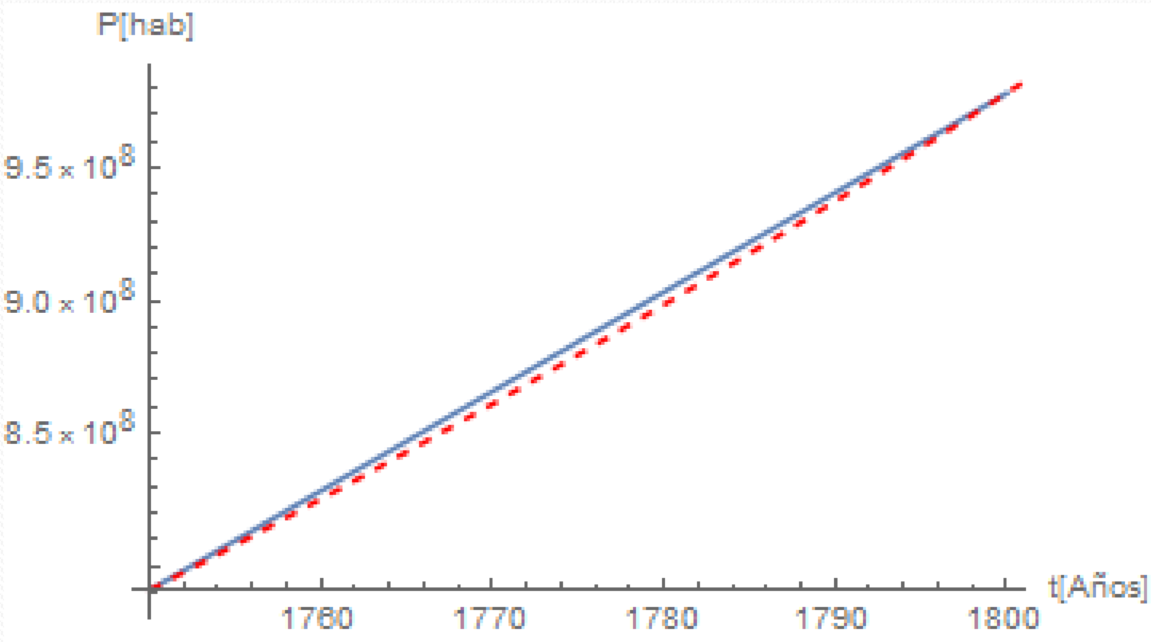
- En el neolítico (nueva piedra) se da un gran cambio en el comportamiento humano. Se establece en un lugar, se hace sedentario. La invención de la agricultura y el desarrollo de la ganadería son fundamentales.



- Construcción de las primeras viviendas
- Monumentos megalíticos.
- Uso de fibras vegetales para la fabricación de ropa.
- Pasa del tallado al pulimento de piedra.
- Descubrió la agricultura.
- Domesticación de animales.
- Se hizo sedentario.
- Se comienza con una estratificación social.
- Se inventó la cerámica [3]

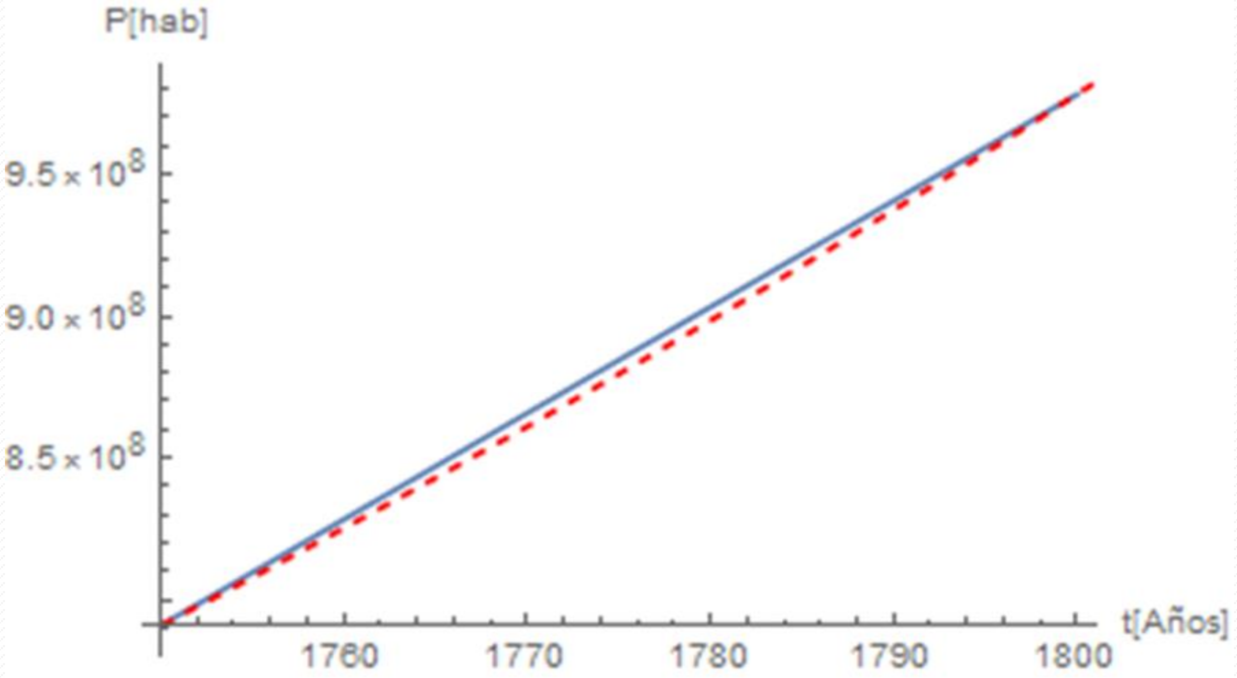
La revolución industrial

Año	Población mundial
1750	791 000 000
1800	978 000 000
1850	1 262 000 000



$$y1=-5.754*10^{9}+3.74*10^{6}\ t$$

$$y2=470428.\ e^{0.00424423\ t}$$



- Pero esta constante de proporcionalidad era de valor distinto en el Paleolítico al Neolítico y a la revolución industrial.

$$\text{kPaleolítico} = 0.0000274117$$

$$kNeolítico = 0.000249676$$

$$kRevoluciónIndustrial = 0.0042442$$

¿Algo cambió en el crecimiento poblacional?

El problema Malthusiano

- Si la población crece en forma exponencial pero las fuentes de alimentos lo hacen de forma lineal, en algún momento la población sería mayor que la disponibilidad de alimentos.

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\ P(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = k2\ Ao$$

- Al resolver ambas ecuaciones diferenciales se tiene

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\, P(t)$$

$$P(t) = Po\; e^{k\,t}$$

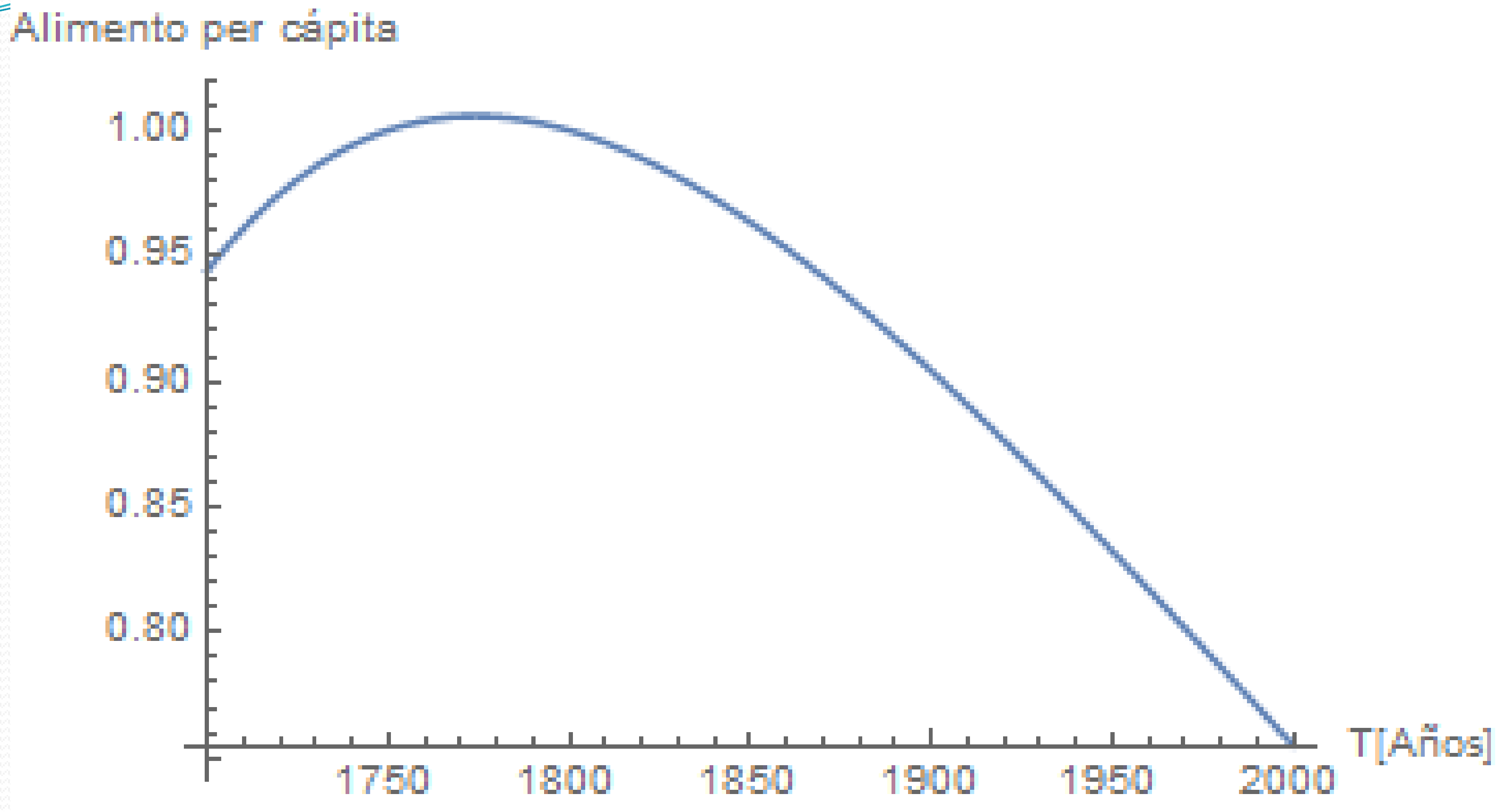
$$\frac{dA(t)}{dt} = k2\; Ao$$

$$A(t) = Ao(k2\; t + 1)$$

- Al obtener la cantidad de alimentos por individuo se tiene

$$\frac{A(t)}{P(t)} = \frac{Ao(k2\ t + 1)}{Po\ e^{k\ t}} = a0\ (k2\ t + 1)e^{-k\ t}$$

- En un momento parece que la cantidad de alimento por habitante será mayor (parte donde domina la relación lineal) pero llegado un tiempo crítico, la parte exponencial domina a la ecuación, llevando a la falta e alimento para la creciente población.



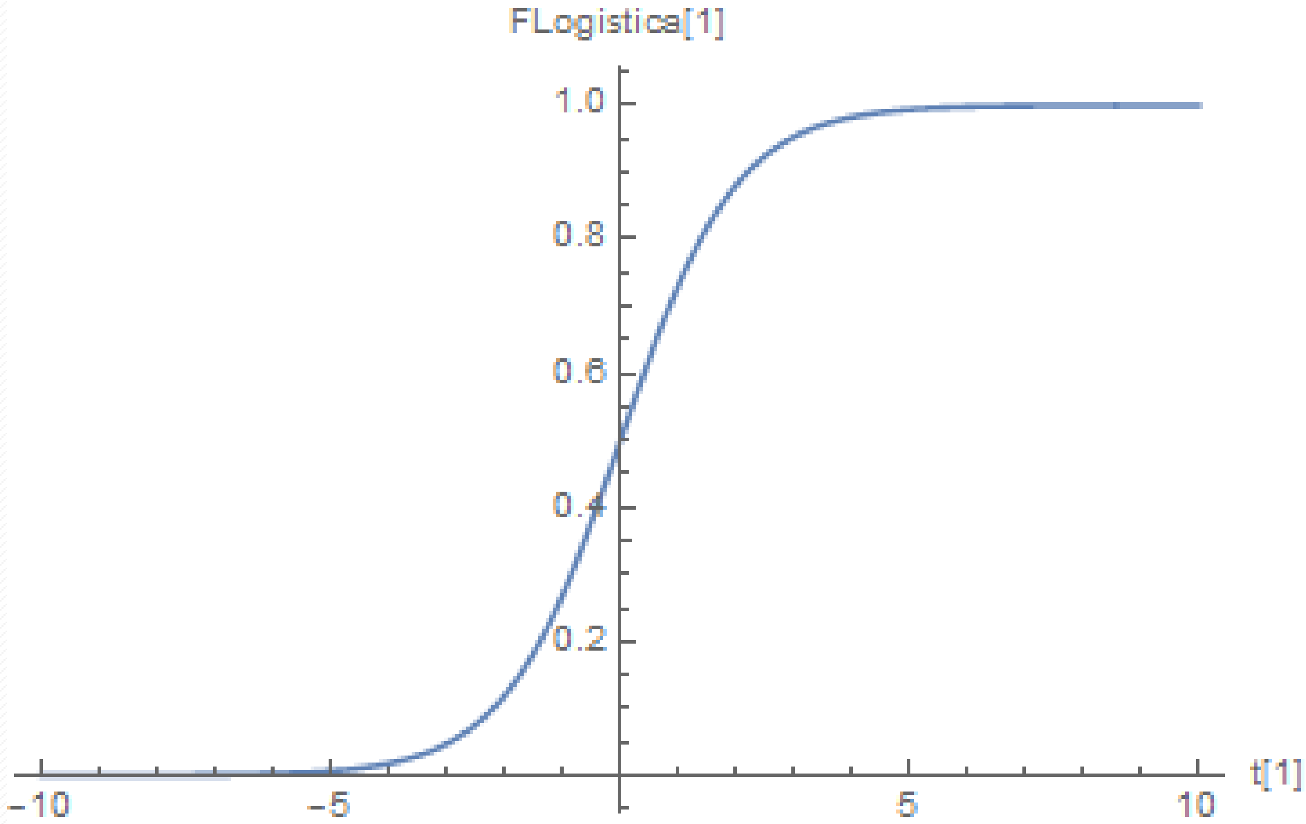
Este modelo catastrófico del crecimiento de la población no se cumplió, en gran medida por que el crecimiento de la producción de recursos no es de crecimiento lineal.

Curva logística

El crecimiento logístico está estrechamente relacionado con el crecimiento exponencial. Cuando se utiliza el modelo en intervalos de tiempo pequeños, no se alcanza a apreciar la diferencia entre ellos.

El modelo logístico propone:

- La tasa de reproducción es proporcional a la población existente (crecimiento exponencial)
- la tasa de reproducción es proporcional a la cantidad de recursos disponibles.



$$\text{FLogística} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$$

$$\frac{dP(t)}{dt} \propto P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} \propto 1 - \frac{P(t)}{Kma}$$

Kma es la capacidad de carga del medio ambiente, que sería la población máxima que podría soportar indefinidamente un entorno.

Ecuación de Verhulst

$$\frac{dP(t)}{dt} \propto P(t)(1 - \frac{P(t)}{Kma})$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = r\,P(t)(1 - \frac{P(t)}{Kma})$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \ r\,P(t) - \frac{r(P(t))^2}{Kma}$$

$$\frac{dP(t)}{P(t)(1-\frac{P(t)}{Kma})} = rdt$$

$$P(t) = \frac{e^{rt}K}{-e^{C1} + e^{rt}}$$

$$P(t) = \frac{K\,Po\,e^{rt}}{K + Po(\,e^{rt} - 1)}$$

Ecuación de Verhulst

$$\frac{dP(t)}{dt} = r\,P(t)(1 - \frac{P(t)}{Kma})$$

Si P(0)=Po

$$P(t) = \frac{K\,Po\,e^{r\,t}}{K + Po(\,e^{rt} - 1)}$$

1000 millones	1804
2000 millones	1927 (123 años después)
3000 millones	1960 (33 años después)
4000 millones	1974 (14 años después)
5000 millones	1987 (13 años después)
6000 millones	1999 (12 de octubre) (12 años después)

Estrategias de supervivencia

$$\frac{dN}{dt} = r\,N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Estrategia "r"

- Son organismos pequeños que alcanzan la madurez en poco tiempo
- Tienen períodos de vida cortos
- Tienen crías numerosas
- Dedican poca o ninguna energía a la crianza
- No cuentan con mecanismos para limitar su reproducción
- Tienden a ser oportunistas invadiendo nuevas áreas y adaptándose a las mismas con facilidad.

Estrategia “K”

- Son organismos grandes
- Maduran muy lentamente
- Tienden a vivir por un período de tiempo mayor
- Sus crías son más resistentes a enfermedades
- Tienen crías poco numerosas
- Dedican tiempo y energía a la crianza de los más pequeños
- Poseen mecanismos para limitar su reproducción
- Se mantienen en un hábitat en particular sin invadir los de otras especies

Comparación entre las estrategias

La estrategia “r” produce múltiples descendientes, con una probabilidad de supervivencia baja, la especie es poco dependiente del futuro de un pequeño número de individuos.

La estrategia “K” invierten gran cantidad de recursos en unos pocos descendientes, con una alta probabilidad de supervivencia, la especie pude ser vulnerable respecto a la suerte de un pequeño número de individuos.

Otros modelos logísticos Medio ambiente limitado

Un contenedor tiene y(t) moscas, con una capacidad de carga de N insectos. Un modelo proporcional de crecimiento

$$y' = K\,y$$

combinado con un modelo de proporcionalidad variable

$$K = k(N - y)$$

Lleva al modelo

$$y' = k(N - y)y$$

Otros modelos logísticos
Propagación de una enfermedad

El tamaño inicial de una población susceptible es N, siendo

$$y \quad número\ de\ infectados$$
$$N - y \quad número\ de\ susceptibles$$

Si los encuentros propagan a una enfermedad incurable, la propagación será proporcional al número de infectados y al número de susceptibles.

$$y' = k(N - y)y$$

Es el mismo modelo para la propagación de un rumor

Ecuaciones Lotka–Volterra

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta\, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta\, x)$$

“x” representa al a presa y su crecimiento esta dado por la tasa de crecimiento menos el número de encuentros con el predador.

“y” representa al predador y su crecimiento está dado por la caza de presas menos la muerte natural de estos.

Referencias

[1] The Human Journey: Migration Routes, National Geographic.
https://genographic.nationalgeographic.com/human-journey

[2] Mitochondrial DNA and human evolution, Nature 1987
http://www.nature.com/nature/ancestor/pdf/325031.pdf

[3] http://mihistoriauniversal.com/prehistoria/prehistoria/

[4] http://www4.tecnun.es/asignaturas/Ecologia/Hipertexto/14PolEcSoc/120PobHum.htm

[5] Enns, Richard H. It's a Nonlinear World

[6] Banco Mundial
http://www.worldbank.org/depweb/spanish/modules/social/pgr/

Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, 2010

Mesografía

http://www4.tecnun.es/asignaturas/Ecologia/Hipertexto/indice.html

http://datos.bancomundial.org/