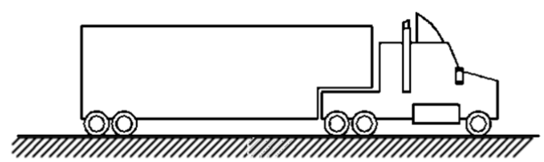
2. CINÉTICA DE LA PARTÍCULA

2.1 Movimiento rectilíneo

2.1.1 Aceleración constante

1. Un tractor y su remolque aumentan uniformemente su rapidez de 36 a 72 km/h en 4 s. Sabiendo que sus pesos son, respectivamente, 2 y 20 ton, calcule la fuerza de tracción que el pavimento ejerce sobre el tractor y la componente horizontal de la fuerza que se ejerce en el enganche entre los vehículos durante ese movimiento.



Resolución

A partir de la información del movimiento, investigamos la aceleración del vehículo.

Comenzaremos convirtiendo las velocidades a m/s:

$$36 \ \mathrm{km/h} = \frac{36}{3.6} \ \mathrm{m/s} = 10 \ \mathrm{m/s}$$

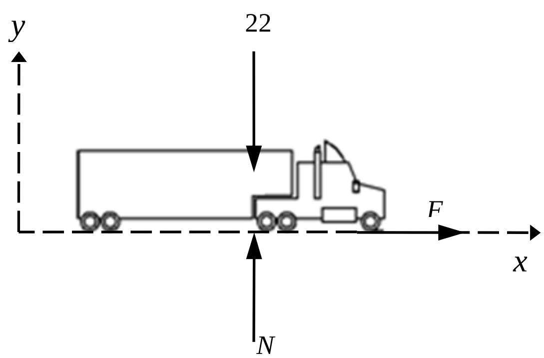
$$72 \ \mathrm{km/h} = \frac{72}{3.6} \ \mathrm{m/s} = 20 \ \mathrm{m/s}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Como el aumento de velocidad es uniforme:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20-10}{4} = 2.5$$

Para conocer las fuerzas —problema cinético— comenzaremos: 1) dibujando el diagrama de cuerpo libre del conjunto; 2) eligiendo un sistema de referencia.



Empleamos a continuación las ecuaciones cinéticas:

$$\sum Fy = 0$$

$$N - 22 = 0$$

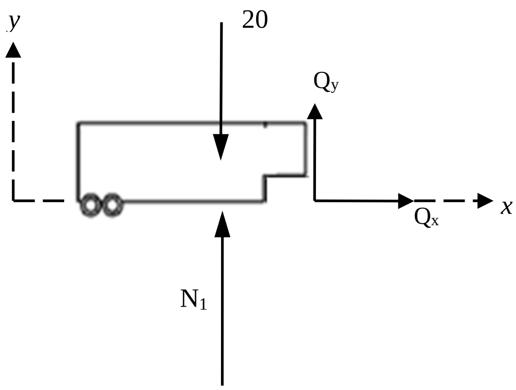
$$N = 22$$

Puesto que la aceleración del vehículo es horizontal, este resultado no es útil para la resolución del problema.

$$\sum Fx = ma$$

$$F = \frac{22}{9.81}(2.5)$$

Como $P=mg$; entonces $m=P/g$



$$\boxed{F = 5.61 \text{ ton} \rightarrow}$$

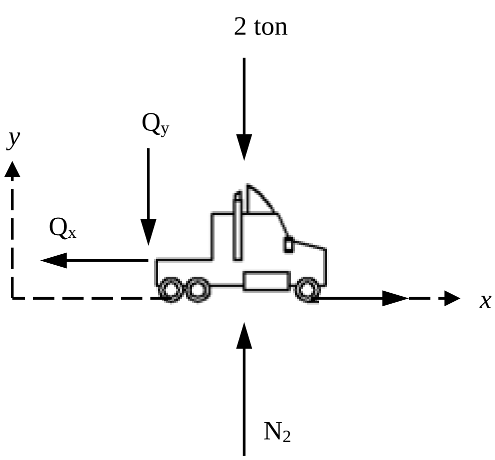
Para conocer la fuerza en el enganche, se puede estudiar cualquiera de los dos cuerpos que la ejercen. Elegiremos el remolque.

$$\sum Fx = ma$$

$$Q_x = \frac{20}{9.81}(2.5)$$

$\boxed{Q_x = 5.10 \text{ ton}}$ Se trata de una tensión

Podemos comprobar los resultados analizando el tractor:



Por la tercera ley de Newton, las reacciones del remolque sobre el tractor son iguales a las reacciones del tractor sobre el remolque, pero de sentido contrario.

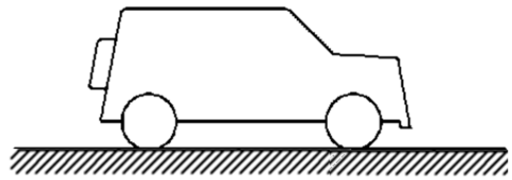
$$\sum Fx = ma$$

$$5.61 - Q_x = \frac{2}{9.81}(2.5)$$

$$Q_x = 5.61 - \frac{2}{9.81}(2.5)$$

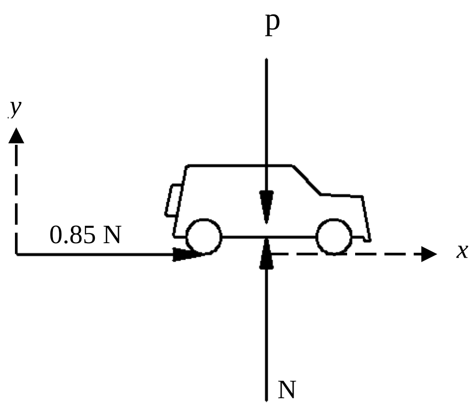
$$\boxed{Q_x = 5.10 \text{ ton}}$$

2. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre las llantas de una camioneta de doble tracción y la pista son 0.85 y 0.65, respectivamente. Diga cuál será la velocidad teórica máxima que alcanzará la camioneta en una distancia de 300 ft, suponiendo suficiente la potencia de su motor.



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre y elegimos el sistema de referencia.



Como deseamos conocer la velocidad máxima después de recorrer cierta longitud, se requiere que el automóvil adquiera la máxima aceleración, por tanto, que ejerza la máxima fuerza de tracción, que es de fricción en este caso.

$$\sum F_y = 0$$
$$P - N = 0$$
$$N = P$$
$$\sum F_x = ma$$
$$0.85N = \frac{P}{32.2}a$$
$$0.85P = \frac{P}{32.2}a$$
$$0.85 = \frac{a}{32.2}$$
$$a = 0.85(32.2) = 27.4$$

Se trata de una aceleración constante, por tanto:

$$a = v\frac{dv}{dx}$$
$$a\int dx = \int_{v1}^{v2} v\,dv$$
$$a(\Delta x) = \frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2}$$

En este caso, $v_1 = 0$ y $\Delta x = 300$

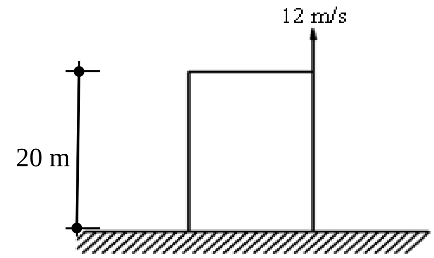
$$v_2^{\ 2} = 2a(\Delta x) = 2(27.4)300$$

$$\boxed{v_2 = 128.1 \ {}^{\text{ft}}\!/\!{}_{\text{s}}}$$

Se puede convertir a ${}^{\text{mi}}\!/\!{}_{\text{h}}$:

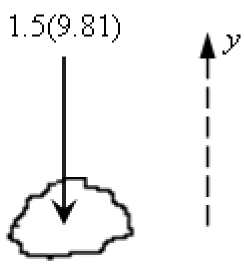
$$128.1 \ {}^{\text{ft}}\!/\!{}_{\text{s}} = 128.1\left(\frac{30}{44}\right) \ {}^{\text{mi}}\!/\!{}_{\text{h}} = 87.4 \ {}^{\text{mi}}\!/\!{}_{\text{h}}$$

3. Un niño arroja una piedra de 1.5 kg de masa hacia arriba, verticalmente, con una velocidad inicial de 12 m/s desde la orilla de un edificio de 20 m de altura. Determine: *a)* la altura máxima, sobre el suelo, que alcanza la piedra; *b)* la velocidad con que llega al suelo.



Resolución

Dibujamos la piedra en un diagrama de cuerpo libre que represente cualquier instante del movimiento, y elegimos un sistema de referencia.

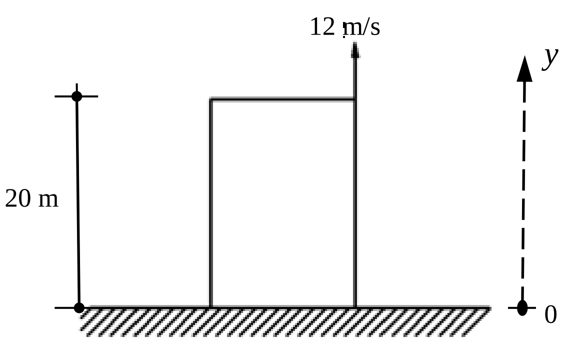


Disponemos de una ecuación cinética:

$$\sum Fy = ma$$
$$-1.5(9.81) = 1.5a$$
$$a = -9.81$$

Es decir, en cualquier instante, suba o baje la piedra, su aceleración es la de la gravedad y se dirige hacia el centro de la Tierra.

A partir de la aceleración, escribimos las ecuaciones del movimiento de la piedra, refiriéndolas al sistema de referencia que se muestra en la figura.



$$a = -9.81$$
$$v = v_0 + \int a\,dt = 12 - 9.81\int dt = 12 - 9.81t$$
$$y = y_0 + \int v\,dt = 20 + \int (12 - 9.81t)dt$$
$$= 20 + 12t - \frac{9.81}{2}t^2$$

Ahora podemos contestar las preguntas.

a) Cuando alcance la altura máxima su velocidad será nula.

$$0 = 12 - 9.81t$$

$$t = \frac{12}{9.81}$$

Y en ese instante:

$$y = 20 + 12\left(\frac{12}{9.81}\right) - \frac{9.81}{2}\left(\frac{12}{9.81}\right)^2$$

$$y = 20 + \frac{144}{9.81} - \frac{72}{9.81} = 20 + \frac{72}{9.81}$$

$\boxed{y = 27.3 \text{ m}}$ que es la altura máxima sobre el suelo

b) Llega al suelo cuando y = 0

$$0 = 20 + 12t - \frac{9.81}{2}t^2$$

$$9.81t^2 - 24t - 40 = 0$$

Las raíces son:

$$t_1 = 3.58$$

$$t_2 = -1.138$$

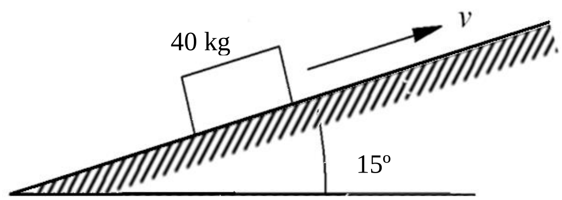
El tiempo en que llega al suelo es la raíz positiva y la velocidad es:

$$v = 12 - 9.81(3.58) = -23.2$$

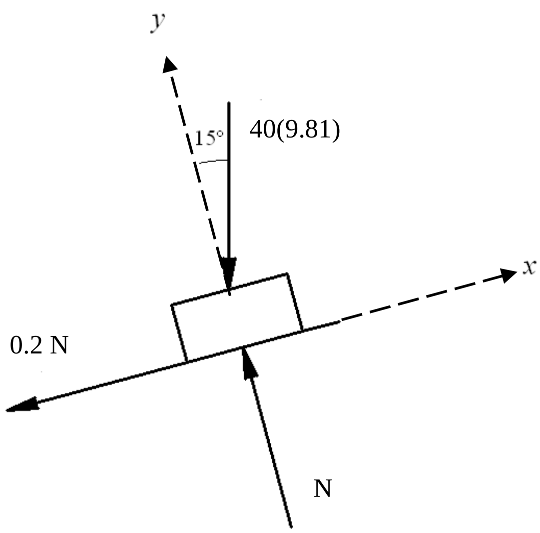
El signo negativo indica que su sentido es contrario al sentido del eje de las yes, elegido arbitrariamente.

$$\boxed{v = 23.2 \ ^{\text{m}}\!/_{\text{s}} \ \downarrow}$$

4. Se lanza un cuerpo de 40 kg hacia arriba de un plano inclinado con un ángulo de 15º, con una velocidad inicial de 20 m/s. Si los coeficientes de fricción estática y cinética son 0.25 y 0.20, respectivamente, entre el cuerpo y el plano, ¿cuánto tiempo emplea en volver al punto del que fue lanzado?, ¿con qué velocidad pasa por él?



Resolución



Dibujamos el diagrama de cuerpo libre mientras el cuerpo sube, elegimos el sistema de referencia. Empleamos a continuación las ecuaciones cinéticas:

$$\sum Fy = 0$$
$$N - (40)(9.81)\cos 15° = 0$$
$$N = 379 \text{ newtons}$$

$$\sum Fx = ma$$
$$-0.2N - 40(9.81)\text{sen}15° = ma$$
$$-177.4 = ma$$
$$a = -4.43$$

El signo negativo indica que la aceleración tiene sentido contrario al eje de las equis y que el cuerpo se está deteniendo.

Escribimos las ecuaciones del movimiento:

$$a = -4.43$$
$$v = v_0 + \int a_1 dt = 20 - \int 4.43 dt = 20 - 4.43t$$
$$x = x_0 + \int v_1 dt = \int (20 - 4.43t)\ dt = 20t - \frac{4.43}{2}t^2$$

El tiempo que tarda en subir lo encontramos haciendo

$v = 0$.

$$0 = -4.43t + 20$$
$$4.43t = 20$$
$$t = \frac{20}{4.43} = 4.51$$
$$t = 4.51 \ s$$

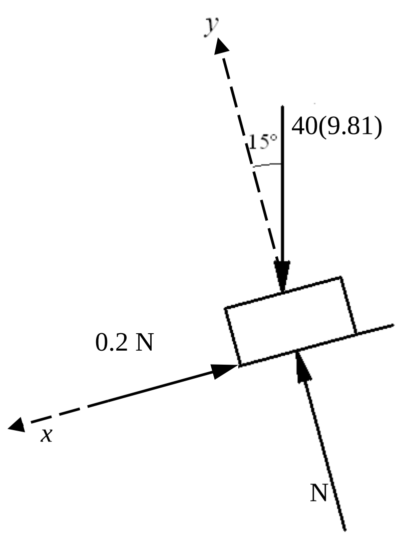
Para encontrar la distancia que recorre el cuerpo en el ascenso hasta detenerse sustituimos el tiempo hallado.

$$x = 20(4.51) - \frac{4.43}{2}(4.51)^2$$
$$x = 45.1 \ \text{m}$$

Habrá recorrido esta distancia antes de detenerse.

Ahora analizaremos al cuerpo a partir de que comienza a bajar.

Utilizando un nuevo sistema de referencia, tenemos:



$$\sum Fy = 0$$
$$N - (40)(9.81)\cos 15° = 0$$
$$N = 379$$

La fuerza de fricción tiene ahora otro sentido.

$$\sum Fx = ma$$
$$40(9.81)\text{sen}15° - 0.2N = 40a$$
$$a = \frac{40(9.81)\text{sen}15° - 0.2N}{40}$$
$$a = 0.644$$

Las ecuaciones del movimiento, en el nuevo sistema de referencia y tomando como origen el punto en el que el cuerpo se detuvo, son:

$$a = 0.644$$
$$v = v_0 + \int a dt = 0.644\int dt = 0.644t$$
$$x = x_0 + \int v dt = \int (0.644t) dt = \frac{0.644}{2}t^2$$

Vuelve al punto de partida en $x = 45.1$ m

$$45.1 = \frac{0.644}{2} t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{(45.1)2}{0.644}}$$

$$t = 11.83\ \text{s}$$

Por tanto, el tiempo que tarda en volver al punto de donde fue lanzado es la suma de este tiempo más el empleado en subir.

$$t_T = 11.83 + 4.51$$

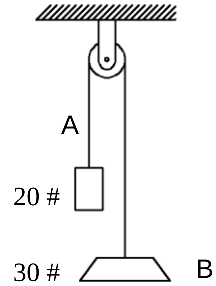
$$\boxed{t_T = 16.34\ \text{s}}$$

La velocidad con la que pasa por dicho punto la hallamos sustituyendo el tiempo de descenso en la ecuación de la velocidad.

$$v = 0.644(11.83)$$

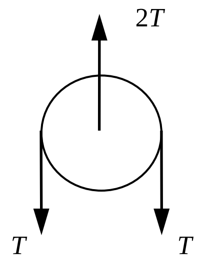
$$\boxed{v = 7.62\ \mathrm{m/s}\quad \swarrow 15^\circ}$$

5. Los pesos de los cuerpos *A* y *B* de la figura son, respectivamente, 20 y 30 lb, y los de la polea y de la cuerda, despreciables. Sabiendo que la cuerda es flexible e inextensible y que no hay ninguna fricción en la polea, calcule la aceleración del cuerpo *B* y la tensión de la cuerda.



Resolución

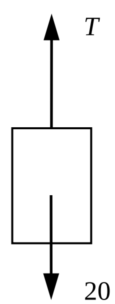
Polea



Los cuerpos están conectados con una sola cuerda, de manera que su aceleración tiene la misma magnitud. La cuerda sufre la misma tensión en toda su longitud, pues la polea es de peso despreciable (y la suma de momentos de las fuerzas respecto a su eje de rotación tiene que ser nula).

Una vez dibujado el diagrama de cuerpo libre de A, elegimos un sistema de referencia dirigido hacia arriba, pues el cuerpo, más ligero que B, acelerará aumentando su rapidez hacia arriba.

Cuerpo A



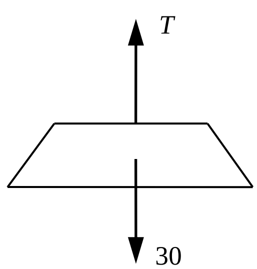
$$\sum Fy = ma$$

$$T - 20 = \frac{20}{32.2}a$$

$$T = 20\left(1 + \frac{a}{32.2}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \ (1)$$

El sistema de referencia para el diagrama de cuerpo libre de B lo elegimos hacia abajo para ser consistentes con el diagrama anterior.

Cuerpo B



$$\sum Fy = ma$$

$$30 - T = \frac{30}{32.2}a$$

$$T = 30\left(1 - \frac{a}{32.2}\right) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \ (2)$$

Igualando (1) y (2)

$$20\left(1 + \frac{a}{32.2}\right) = 30\left(1 - \frac{a}{32.2}\right)$$

$$20 + \frac{20a}{32.2} = 30 - \frac{30a}{32.2}$$

$$\frac{50a}{32.2} = 10$$

$$a = \frac{322}{50} = 6.44$$

La aceleración de B es, por tanto

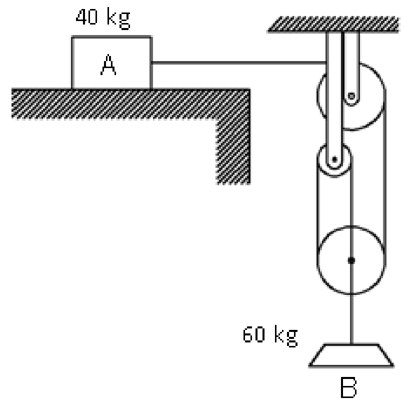
$$\boxed{a = 6.44 \, {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}^2} \downarrow}$$

Y la tensión de la cuerda

$$T = 20(1 + \frac{6.44}{32.2}) = 20(1.2)$$

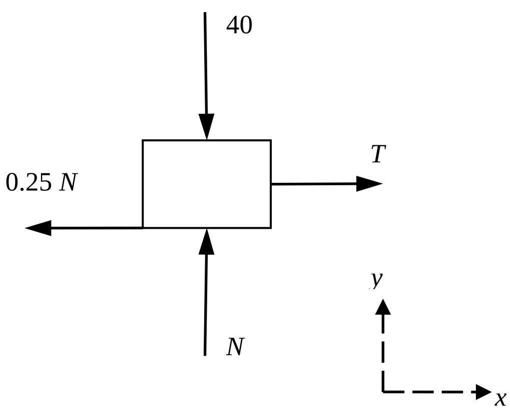
$$\boxed{T = 24 \quad \text{lb}}$$

6. Los cuerpos *A* y *B* pesan 40 y 60 kg, respectivamente. El coeficiente de fricción estática entre el cuerpo *A* y el plano horizontal es 0.35, y el de fricción cinética, de 0.25. Suponiendo despreciable la masa de las poleas y cualquier resistencia suya al movimiento, calcule tanto la tensión de la cuerda que une las poleas, como la aceleración de los cuerpos *A* y *B*.



Resolución

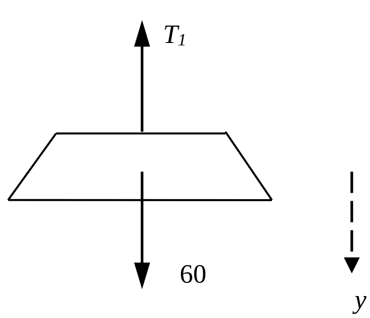
Cuerpo A



$$\sum F_y = 0$$
$$N - 40 = 0$$
$$N = 40$$
$$\sum F_x = ma$$
$$T - 0.25N = \frac{40}{9.81}a_A$$
$$T - 0.25(40) = \frac{40}{9.81}a_A$$
$$T - 10 = \frac{40}{9.81}a_A$$
$$T = 10 + \frac{40}{9.81}a_A \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \ (1)$$

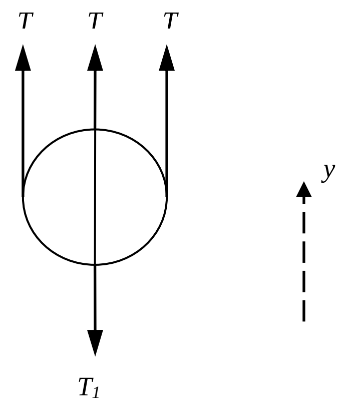
Analizando el cuerpo B

Cuerpo B



$$60 - T_1 = \frac{60}{9.81}a_B$$
$$T_1 = 60 - \frac{60}{9.81}a_B \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \ (2)$$

Tenemos las ecuaciones 1 y 2 con cuatro incógnitas.



Estudiemos la polea móvil.

Como su masa es despreciable

$ma = 0$

Por tanto

$\sum Fy = 0$

$3T - T_1 = 0$

$T_1 = 3T$ _______________ (3)

Y la cuarta ecuación la obtenemos relacionando las aceleraciones de A y B, mediante la cuerda que conecta las poleas, cuya longitud es constante.

$l = -x_A + 3y_B$

Derivando respecto al tiempo

$0 = -v_A + 3v_B$

$0 = -a_A + 3a_B$

Para resolver el sistema de ecuaciones, multiplicamos (1) por (3) e igualamos con (2)

$$3\left(10 + \frac{40}{9.81}a_A\right) = 60 - \frac{60}{9.81}a_B$$

Ahora, sustituimos (4):

$$3\left(10 + \frac{40}{9.81}[3a_B]\right) = 60 - \frac{60}{9.81}a_B$$

$$10 + \frac{120}{9.81}a_B = 20 - \frac{20}{9.81}a_B$$

$$a_B = \frac{9.81}{140}(10)$$

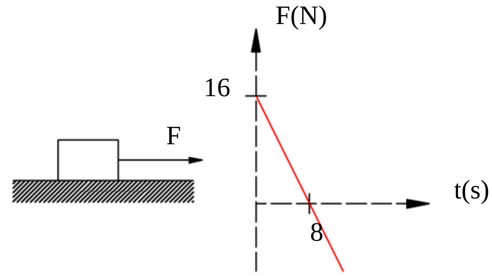
$$\boxed{a_B = 0.701 \ \mathrm{m/s^2} \downarrow}$$

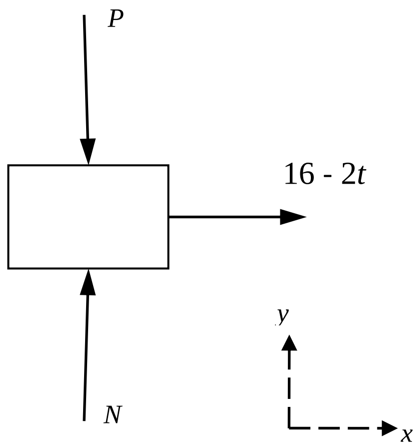
$$\boxed{a_A = 2.10 \ \mathrm{m/s^2} \rightarrow}$$

$$\boxed{T = 18.57 \ \mathrm{kg}}$$

2.1.2 Aceleración variable

7. A un cuerpo que reposa en una superficie lisa se le aplica una fuerza *F* cuya magnitud varía con el tiempo, según se muestra en la gráfica de la figura. Determine el tiempo que se requiere para que el cuerpo regrese a su posición original.





Resolución

De acuerdo con la gráfica, la expresión que define la fuerza horizontal es:

$$F = 16 - 2t$$

Pues 16 *N* es la ordenada al origen y la pendiente es negativa y de 2 *N*/s.

Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre para cualquier instante del movimiento y elegir el sistema de referencia, escribiremos la ecuación cinética.

$$\sum Fx = ma$$

$$16 - 2t = \frac{P}{9.81}\frac{dv}{dt}$$

Hemos sustituido *a* por *dv*/*dt* porque la fuerza está en función del tiempo.

Para resolver la ecuación diferencial, separamos variables e integramos.

$$(16 - 2t)dt = \frac{P}{9.81}dv$$

$$\int (16 - 2t)dt = \frac{P}{9.81}\int dv$$

$$16t - t^2 = \frac{P}{9.81}v + C$$

Para $t = 0, v = 0$, de donde $C = 0$

$$16t - t^2 = \frac{P}{9.81}v$$

$$v = \frac{9.81}{P}(16t - t^2)$$

Sustituimos *v* por *dx*/*dt*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9.81}{P}(16t - t^2)$$

Separando variables e integrando:

$$dx = \frac{9.81}{P}(16t - t^2)dt$$

$$\int dx = \frac{9.81}{P}\int (16t - t^2)dt$$

$$x = \frac{9.81}{P}(8t^2 - \frac{1}{3}t^3) + C_1$$

Escogiendo el origen en el punto de partida. Si $x = 0$, $t = 0$ y $C_1 = 0$.

$$x = \frac{9.81}{P}(8t^2 - \frac{1}{3}t^3)$$

Esta es la ecuación que define la posición en función del tiempo.

Si vuelve al punto de partida, $x = 0$

$$\frac{9.81}{P}(8t^2 - \frac{1}{3}t^3) = 0$$

$$8t^2 - \frac{1}{3}t^3 = 0$$

Dividiendo entre t^2, pues dos raíces son nulas:

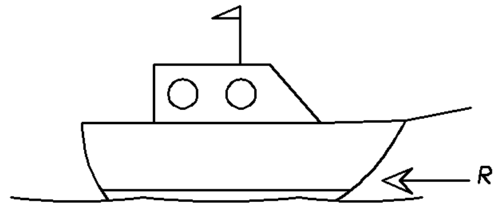
$$8 - \frac{1}{3}t = 0$$

$$t = 8(3)$$

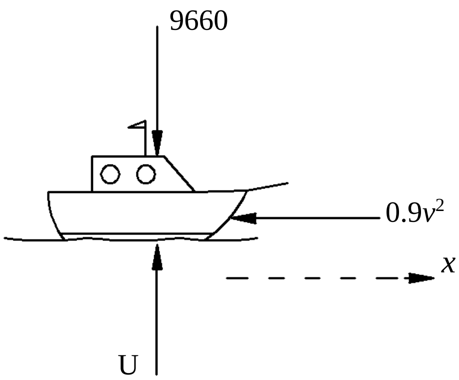
$$\boxed{t = 24 \quad \text{s}}$$

Que es el tiempo en que vuelve al punto de partida.

8. Una embarcación de 9660 lb de desplazamiento navega en aguas tranquilas a 24 nudos cuando su motor sufre una avería. Queda entonces sujeta a la resistencia del agua que, en lb, se puede expresar como $0.9v^2$, donde v está en ft/s. Diga en cuánto tiempo la rapidez de la embarcación se reducirá a 6 nudos.



Resolución



$$\sum Fx = ma$$

$$-0.9v^2 = ma$$

$$-0.9v^2 = \frac{9660}{32.2}\frac{dv}{dt}$$

$$-0.9v^2 = 300\frac{dv}{dt}$$

$$-0.9dt = 300\frac{dv}{v^2}$$

$$-0.9\int dt = 300\int\frac{dv}{v^2}$$

$$-0.9t = -300\frac{1}{v} + C$$

Cuando $t = 0$, $v = 24$ nudos

Dado que la resistencia está expresada en el sistema inglés, realizamos la conversión de nudos a ft/s

$$24\,\frac{\text{mi}\cdot\text{mar.}}{\text{h}} = x\,\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

$$x = 24\,\frac{\text{mi.mar.}}{\text{ft}}\,\frac{\text{s}}{\text{h}}$$

$$x = 24\left(\frac{1852\text{m}}{0.3048\text{m}}\right)\frac{1\text{s}}{3600\text{s}} = 40.53$$

$$0 = -300\frac{1}{(40.53)} + C$$

$$C = \frac{300}{(40.53)}$$

$$C = 7.401$$

Entonces:

$$-0.9t = -\frac{300}{v} + 7.401$$

Cuando la velocidad de la embarcación es
v = 6 nudos:

Nuevamente realizamos la conversión, utilizando una regla de tres con el resultado anterior.

$$\frac{v}{40.53} = \frac{6}{24}$$

$$v = 10.13 \ \mathrm{ft/s}$$

Entonces:

$$-0.9t = -\frac{300}{10.13} + 7.401$$

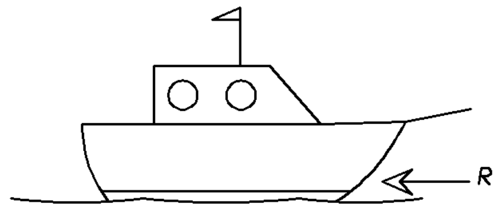
$$-0.9t = -29.6 + 7.401$$

$$-0.9t = -22.2$$

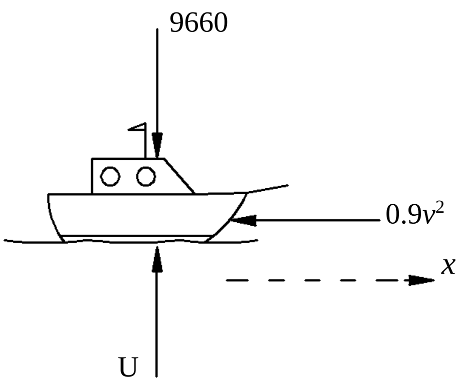
$$t = \frac{-22.2}{-0.9}$$

$$\boxed{t = 24.7 \ \mathrm{s}}$$

9. Una embarcación de 9660 lb de desplazamiento navega en aguas tranquilas a 24 nudos cuando su motor sufre una avería. Queda entonces sujeta a la resistencia del agua que, en lb, se puede expresar como $0.9v^2$, donde v está en ft/s. ¿Qué distancia navegará hasta que su velocidad se reduzca a 6 nudos?



Resolución



Dibujamos un diagrama de cuerpo libre, que represente cualquier instante del movimiento, y elegimos un eje de referencia en dirección de la velocidad.

$$\sum Fx = ma$$

$$-0.9v^2 = \frac{9660}{32.2}\ v\frac{dv}{dx}$$

Hemos sustituido a por $v\ dv/dx$ porque la fuerza está en función de la velocidad y queremos conocer un desplazamiento.

Simplificando la ecuación, tenemos:

$$-0.9v = 300\frac{dv}{dx}$$

Separamos variables

$$-0.9dx = 300\frac{dv}{v}$$

$$-0.9\int dx = 300\int\frac{dv}{v}$$

$$-0.9x = 300\ \text{L}\ v + C$$

Elegimos el origen en la posición en que la embarcación sufre la avería, de modo que

Si $x = 0,\ v = 24$ nudos

$$0 = 300\ \text{L}\ 24\ \text{nudos} + C$$

$$C = -300\ \text{L}\ 24\ \text{nudos}$$

La ecuación queda así:

$$-0.9x = 300\ \mathrm{L}\, v - 300\ \mathrm{L}\ 24\ \text{nudos}$$

$$-0.9x = 300\left(\mathrm{L} v - \mathrm{L}\ 24\ \text{nudos}\right)$$

Por las propiedades de los logaritmos

$$-0.9x = 300\ \mathrm{L}\frac{v}{24\ \text{nudos}}$$

$$x = -\frac{1}{0.003}\ \mathrm{L}\frac{v}{24\ \text{nudos}}$$

Volviendo a utilizar las propiedades de los logaritmos

$$x = \frac{1}{0.003}\ \mathrm{L}\frac{24\ \text{nudos}}{v}$$

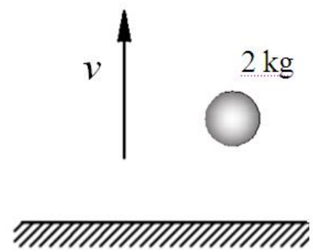
La posición de la embarcación cuando su rapidez es de 6 nudos es:

$$x = \frac{1}{0.003}\ \mathrm{L}\ \frac{24\ \cancel{\text{nudos}}}{6\ \cancel{\text{nudos}}} = \frac{1}{0.003}\mathrm{L}\ 4$$

$$\boxed{x = 462\ \text{ft}}$$

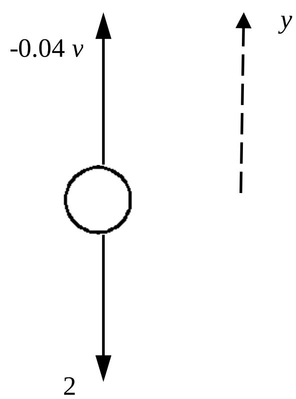
Que es también la distancia que navega hasta dicha posición.

10. Se arroja una pequeña esfera de 2 kg de peso hacia arriba, verticalmente, con una velocidad inicial de 15 m/s. En su movimiento experimenta una resistencia del aire, que, en kg, se puede considerar de 0.04*v*, donde *v* se dé en m/s. Determine: *a)* el tiempo en que alcanza su altura máxima; *b)* la velocidad con que vuelve al punto de partida.



Resolución

En el diagrama de cuerpo libre, dibujaremos la resistencia del aire en sentido positivo, pero asignamos a la magnitud un signo negativo, de modo que si *v* es positiva, la fuerza resulta negativa y viceversa.



$$\sum Fy = ma$$

$$-2 - 0.04v = \frac{2}{g}\frac{dv}{dt}$$

$$dt = \frac{2}{g}\left(\frac{dv}{-0.04v-2}\right)$$

$$\int dt = \frac{2}{g}\int\left(\frac{dv}{-0.04v-2}\right)$$

$$t = -\frac{2}{0.04g}\mathrm{L}(-0.04v-2) + C$$

Si $t = 0$, $v = 15$

$$0 = \frac{1}{0.02g}\mathrm{L} - 2.6 + C$$

$$t = \frac{1}{0.02g}\mathrm{L}\left(\frac{-2.6}{-0.04v-2}\right)$$

$$t = \frac{1}{0.02g}\mathrm{L}\left(\frac{2.6}{0.04v+2}\right) \qquad \text{(1)}$$

Nombramos (1) a la ecuación anterior ya que será utilizada más adelante.

Para $v = 0$

$$t = \frac{1}{0.02g} \mathrm{L}\ 1.3$$

$$\boxed{t = 1.337\ \text{s}}$$

De la ecuación (1)

$$0.02gt = \mathrm{L}\left(\frac{2.6}{0.04v + 2}\right)$$

$$e^{0.02gt} = \frac{2.6}{0.04v + 2}$$

$$0.04v + 2 = 2.6\ e^{-0.02gt}$$

$$0.04v = -2 + 2.6\ e^{-0.02gt}$$

$$v = -50 + 65\ e^{-0.02gt} \qquad \underline{\hspace{4cm}} \ (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -50 + 65\ e^{-0.02gt}$$

$$\int dy = \int \left(-50 + 65\ e^{-0.02gt}\right) dt$$

$$y = -50t - \frac{65}{0.02g}\ e^{-0.02gt} + C_1$$

Si $y = 0$, $t = 0$

$$0 = -\frac{65}{0.02g} + C_1$$

$$y = -50t + \frac{65}{0.02g}\left(1 - e^{-0.02gt}\right)$$

Se encuentra el valor de t para $y = 0$

$$t = 2.801\ \text{s}$$

Sustituyendo el tiempo encontrado en la ecuación (2)

$$\boxed{v = 12.47\ \text{m}/\text{s}\ \downarrow}$$

O bien:

$$\sum Fy = ma$$

$$-0.04v - 2 = \frac{2}{g} v \frac{dv}{dy}$$

$$v + 50 = -\frac{50}{g} v \frac{dv}{dy}$$

$$-\frac{g}{50} dy = \frac{v dv}{v + 50}$$

$$-\frac{g}{50} \int dy = \int \frac{v + 50 - 50}{v + 50} dv$$

$$-\frac{g}{50} \int dy = \int dv - 50 \int \frac{dv}{v + 50}$$

$$-\frac{g}{50} y = v - 50\mathrm{L}(v + 50) + C_1$$

Si $y = 0$, $v = 15$

$$0 = 15 - 50 \ \mathrm{L}65 + C_1$$

$$C_1 = -15 + 50 \ \mathrm{L}65$$

$$-\frac{g}{50} y = v - 15 + 50\mathrm{L}\left(\frac{65}{v + 50}\right)$$

Para $y = 0$:

$$0 = v - 15 + 50\mathrm{L}\left(\frac{65}{v + 50}\right)$$

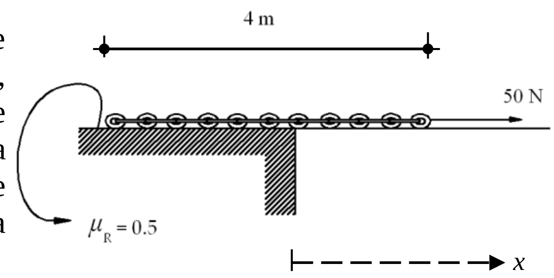
Resolviendo mediante aproximaciones o con ayuda de una calculadora programable, obtenemos:

$v_1 = 15$ (Cuando comienza el movimiento)

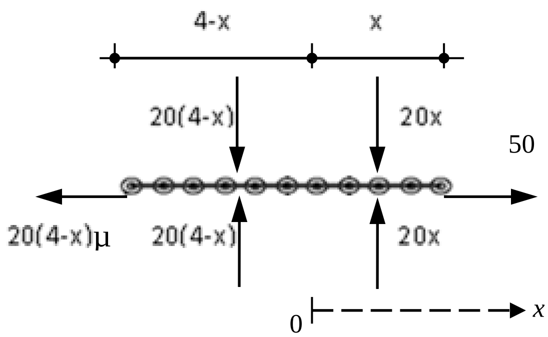
$v_2 = -12.48$

$$\boxed{v = 12.48 \ \mathrm{m/s} \ \downarrow}$$

11. Una cadena de 4 m de longitud y 80 N de peso reposa en el borde de una superficie rugosa, cuyo coeficiente de fricción cinética es 0.5. Mediante una fuerza constante de 5-+0 N se jala a otra superficie contigua, lisa. Calcule la velocidad con que la cadena termina de pasar completamente a la superficie lisa.



Resolución



Dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la cadena, que representa un instante cualquiera de su movimiento. Un tramo de ella se encuentra sobre la superficie rugosa y otro en la lisa.

Colocamos el origen del sistema de referencia en la unión de las dos superficies, de modo que el tramo sobre la superficie lisa tiene una longitud *x*.

Como el peso de la cadena es de 80 N y mide 4 m, su peso por unidad de longitud es:

$$w = \frac{80}{4} = 20\,{}^{\mathrm{N}}\!/_{\mathrm{m}}$$

Las componentes normales de las superficies sobre la cadena tienen la misma magnitud que los pesos de sus tramos respectivos.

$$\sum Fx = ma$$

$$50 - 0.5\left[20(4-x)\right] = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$50 - 10(4-x) = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$50 - 40 + 10x = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$10 + 10x = \frac{80}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

$$1 + x = \frac{8}{9.81} v \frac{dv}{dx}$$

Hemos sustituido *a* por $v\frac{dv}{dx}$ ya que la fuerza está en función de la posición *x*, y hemos dividido ambos miembros entre 10.

Separamos variables e integramos.

$$(1+x)dx = \frac{8}{9.81}vdv$$

$$\int(1+x)dx = \frac{8}{9.81}\int vdv$$

$$x + \frac{x^2}{2} = \frac{8}{9.81}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + C$$

Si $x = 0, v = 0$ puesto que cuando el extremo derecho de la cadena se halla en el punto de unión de las superficies comienza a moverse.

$$C = 0$$

$$x + \frac{x^2}{2} = \frac{4}{9.81}v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{9.81}{4}}\sqrt{x + \frac{x^2}{2}}$$

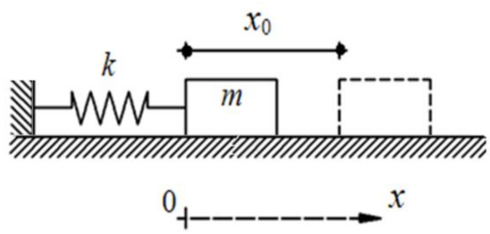
La cadena termina de pasar a la superficie lisa cuando $x = 4$, y su velocidad entonces es:

$$v = \sqrt{\frac{9.81}{4}}\sqrt{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{9.81}{4}}\sqrt{4+8}$$

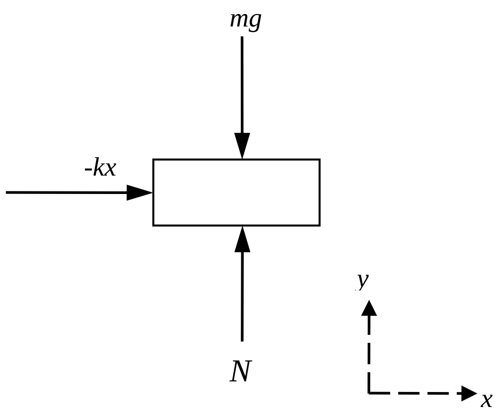
$$\boxed{v = 5.42\ \mathrm{m/s} \rightarrow}$$

12. Un cuerpo de masa *m* unido a un resorte, cuya constante de rigidez es *k*, se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Se aleja el cuerpo una distancia x_o de su posición de equilibrio y se suelta. Escriba las ecuaciones del movimiento del cuerpo en función del tiempo y dibuje las gráficas correspondientes.



Resolución

En el diagrama de cuerpo libre, dibujaremos la fuerza del resorte en sentido positivo, pero asignamos a su magnitud un signo negativo, de forma que si *x* es positiva la fuerza resulte negativa y viceversa.



$$\sum Fx = ma$$

$$-kx = m\frac{dv}{dx}$$

El signo negativo sirve para cambiar el sentido de la fuerza. Pues si *x* es positiva, es decir, si el cuerpo está a la derecha del origen, la fuerza se dirige hacia la izquierda; y viceversa.

$$-k\frac{x^2}{2} + C = m\frac{v^2}{2}$$

Cuando $x = x_0$; $v = 0$

$$-k\frac{{x_0}^2}{2} + C = 0$$

$$C = k\frac{{x_0}^2}{2}$$

Entonces:

$$-k\frac{x^2}{2} = m\frac{v^2}{2} - k\frac{{x_0}^2}{2}$$

$$-k\frac{x^2}{2} + k\frac{{x_0}^2}{2} = m\frac{v^2}{2}$$

$$\frac{k}{2}({x_0}^2 - x^2) = \frac{m}{2}v^2$$

$$k({x_0}^2 - x^2) = mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0{}^2 - x^2\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{x_0{}^2 - x^2}$$

Sea $p = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = p\sqrt{x_0{}^2 - x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x_0{}^2 - x^2}} = pdt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x_0{}^2 - x^2}} = p\int dt$$

$$\text{angsen}\,\frac{x}{x_0} = pt + C_2$$

Si $t = 0$, $x = x_0$

$$\text{angsen}(1) = C_2$$

$$C_2 = 90°$$

$$\text{angsen}\,\frac{x}{x_0} = pt + 90°$$

Aplicando la función seno de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{x}{x_0} = \text{sen}\left(pt + 90°\right)$$

$$\frac{x}{x_0} = \cos pt$$

$$\boxed{x = x_0 \cos pt}$$

Derivando con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = x_0\left(-p\ \text{sen}\ pt\right) = -px_0\text{sen}\ pt$$

$$\boxed{v = -px_0\text{sen}\ pt}$$

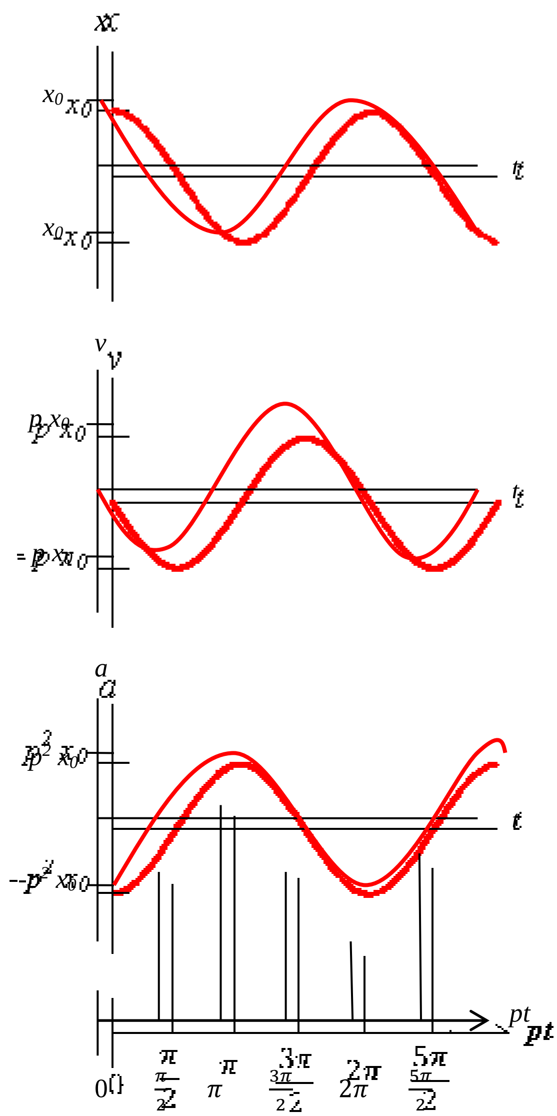
Derivando nuevamente con respecto del tiempo encontraremos la aceleración.

$$\frac{dv}{dt} = -px_0\left(p\cos pt\right) = -p^2 x_0 \cos pt$$

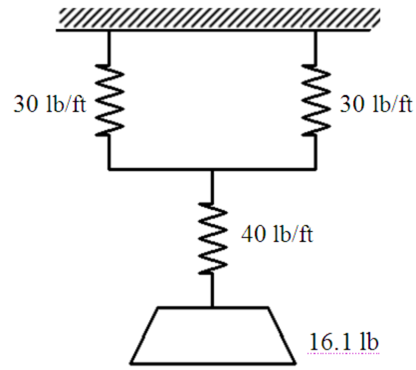
$$\boxed{a = -p^2 x_0 \cos pt}$$

$$\boxed{a = -p^2 x}$$

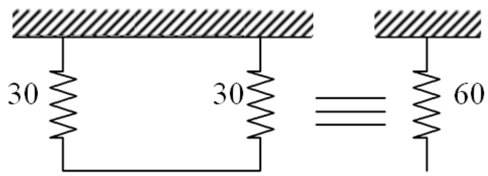
Las gráficas para la posición, velocidad y aceleración son, respectivamente:



13. Un cuerpo de 16.1 lb de peso pende de los tres resortes mostrados en la figura. Se jala el cuerpo hacia abajo tres pulgadas de su posición de equilibrio y se suelta. Se pide: *a)* Hallar la constante de rigidez de un resorte equivalente a los tres de la figura. *b)* Determinar si el movimiento que adquiere el cuerpo es armónico simple o no. *c)* Dar la amplitud, el período y la frecuencia del movimiento. *d)* Calcular la velocidad y aceleración máximas del cuerpo.

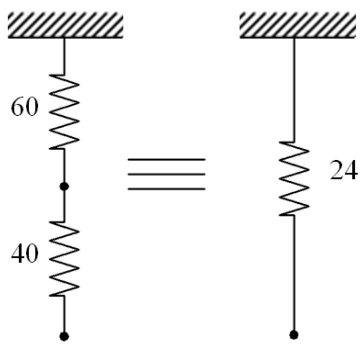


Resolución



a) La constante de rigidez equivalente a la de los dos resortes en paralelo es $k_1 = 30 + 30 = 60 \ {}^{\text{lb}}\!/_{\text{ft}}$

La constante equivalente a los dos resortes en serie es:

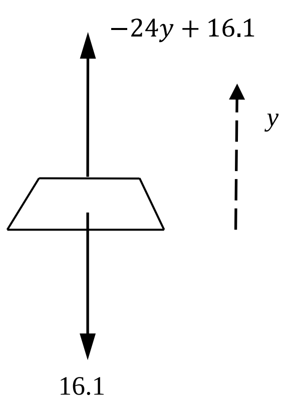


$$\frac{1}{k} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{2+3}{120} = \frac{5}{120}$$

$$\boxed{k = 24 \ {}^{\text{lb}}\!/_{\text{ft}}}$$

b) Dibujamos el diagrama de cuerpo libre para cualquier instante del movimiento y elegimos como origen la posición de equilibrio del cuerpo. En dicha posición la fuerza del resorte es igual al peso, de 16.1 lb, de modo que en cualquier posición la acción del resorte tiene una magnitud de $-24y + 16.1$



$$\sum Fy = ma$$

$$-24y + 16.1 - 16.1 = \frac{16.1}{32.2}a$$

$$-24y = 0.5a$$

$$a = -48y$$

Esta ecuación es de la forma $a = -\rho^2 x$ que corresponde al movimiento armónico simple, es decir, rectilíneo, cuya aceleración es proporcional a la posición con respecto al punto de equilibrio y se dirige hacia él.

Por lo tanto, el cuerpo adquiere movimiento armónico simple.

c) Como la amplitud es la distancia máxima que la partícula se aleja del origen, $y_0 = 3 \text{ in}$, que es la longitud señalada en el enunciado.
Como $1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$

$$\boxed{y_0 = 0.25 \text{ ft}}$$

El periodo T es el tiempo en que el cuerpo da una oscilación completa:

$$pT = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

En donde $p = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$k = 24$$

$$m = \frac{16.1}{32.2} = 0.5$$

$$p = \sqrt{\frac{24}{0.5}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Entonces:

$$T = \frac{2\pi}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{T = 0.907 \text{ s}}$$

Y la frecuencia, que es el número de ciclos completos por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{p}{2\pi}$$

$$\boxed{f = 1.103 \text{ Hz}}$$

d) Como se trata de movimiento armónico simple, las ecuaciones del movimiento son:

$$y = y_0 \cos pt$$
$$v = -py_0 \operatorname{sen}\ pt$$
$$a = -p^2 y_0 \cos pt = -p^2 y$$

que, para este caso particular, son:

$$y = 0.25 \cos 4t\sqrt{3}$$
$$v = -\sqrt{3} \operatorname{sen}\ 4t\sqrt{3}$$
$$a = -12 \cos 4t\sqrt{3}$$

El valor de la velocidad máxima se alcanza cuando

$\left|\operatorname{sen}\ pt\right| = 1$, por tanto:

$$v_{max} = \left|-py_0\right| = \sqrt{3}$$

$$\boxed{v_{max} = 1.732\ \text{ft}/\text{s}}$$

La aceleración máxima corresponde a la posición extrema, $y = 0.25$

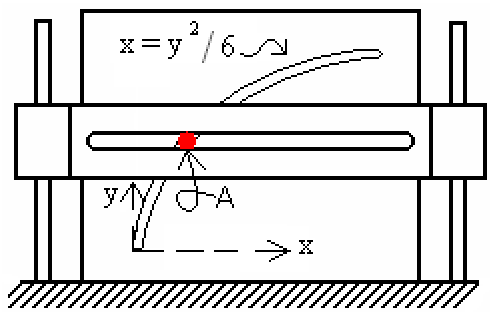
$$a_{max} = \left|-p^2 y_0\right| = 48(0.25)$$

$$\boxed{a_{max} = 12\ \text{ft}/\text{s}^2}$$

2.2 Movimiento curvilíneo

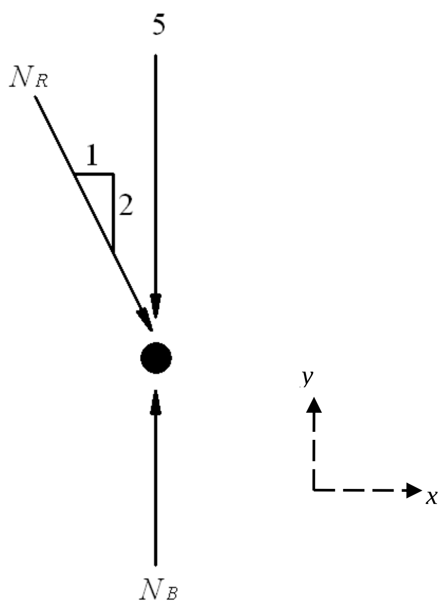
2.2.1 Componentes cartesianas

14. La corredera *A*, de 5 lb de peso, se mueve dentro de la ranura conforme se eleva el brazo horizontal, que tiene una velocidad constante de 3 in/s. Sabiendo que cuando *x* = 6 in, su velocidad tiene una pendiente positiva de 1/2 y su aceleración es horizontal y de 3 in/s^2 dirigida hacia la derecha, determine todas la fuerzas externas que actúan sobre ella en esa posición.



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la corredera. Las reacciones normales del brazo y de la ranura serán llamadas N_B y N_R respectivamente, en donde N_B tendrá la dirección del eje *y*, mientras que N_R será normal a la velocidad en el punto.



$$\sum Fx = ma$$

$$N_R\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{5}{32.2}\left(\frac{3}{12}\right)$$

$$N_R = \frac{5}{32.2}\left(\frac{3}{12}\right)\sqrt{5}$$

$$\boxed{N_R = 0.0868 \text{ lb}}$$

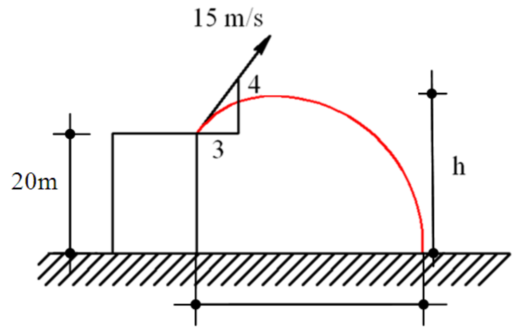
$$\sum Fy = 0$$

$$N_B - 5 - N_R\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

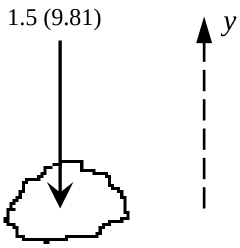
$$N_B = 5 + N_R\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\boxed{N_B = 5.08 \text{ lb}}$$

5. Desde la orilla de un edificio de 20 m de altura, un niño arroja una piedra con una velocidad de 15 m/s, cuya pendiente es de 4/3. Sabiendo que la piedra tiene una masa de 1.5 kg y la resistencia del aire es despreciable, determine la altura máxima *h* sobre el suelo que alcanza la piedra, la distancia horizontal *R* que se aleja del edificio y la velocidad con que llega al suelo.



Resolución



El diagrama de cuerpo libre de la piedra en cualquier instante del movimiento es el que se muestra. Elegimos un eje de referencia unilateral hacia arriba.

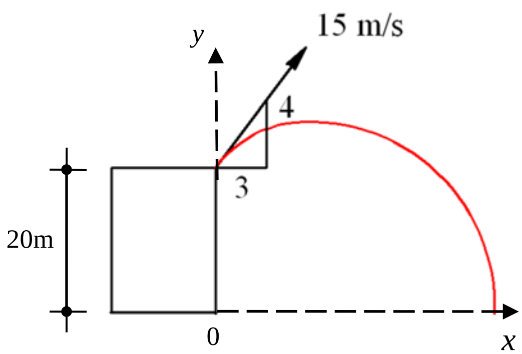
$$\sum Fy = ma$$

$$-1.5(9.81) = 1.5a$$

$$a = 9.81$$

$$a = 9.81\ \mathrm{m/s^2} \downarrow$$

Partiendo de este dato, elegimos un sistema de referencia completo para plantear las ecuaciones del movimiento de la piedra.



Componentes horizontales

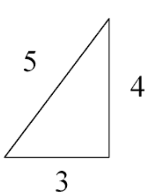
$$a_x = 0$$

$$v_x = v_{0x} + \int a_x dt = v_{0x} = 15\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$v_x = 9$$

$$x = x_0 + \int v_x dt = 9\int dt$$

$$x = 9t$$



Componentes verticales

$$a_y = -9.81$$

$$v_y = v_{0y} + \int (-9.81)dt = 15\left(\frac{4}{5}\right) - 9.81\int dt$$

$$v_y = 12 - 9.81t$$

$$y = y_0 + \int (12 - 9.81t)dt$$

$$y = 20 + 12t - \frac{9.81}{2}t^2$$

Alcanza la altura máxima *h* cuando la componente vertical de la velocidad es nula.

$$v_y = 0$$

$$0 = 12 - 9.81t$$

$$t = \frac{12}{9.81}$$

Y esa altura es *y* = *h*

$$h = 20 + 12\left(\frac{12}{9.81}\right) - \frac{9.81}{2}\left(\frac{12}{9.81}\right)^2$$

$$= 20 + \frac{144}{9.81} - \frac{72}{9.81} = 20 + \frac{72}{9.81}$$

$$\boxed{h = 27.3 \text{ m}}$$

La piedra llega al suelo en un punto situado a una distancia R del edificio. Es decir, cuando

$$y = 0$$

$$0 = 20 + 12t - \frac{9.81}{2}t^2$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$t_1 = 3.58$$

$$t_2 = -1.138$$

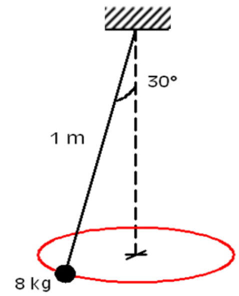
En $t = 3.58$ s, $x = R$

$$R = 9(3.58)$$

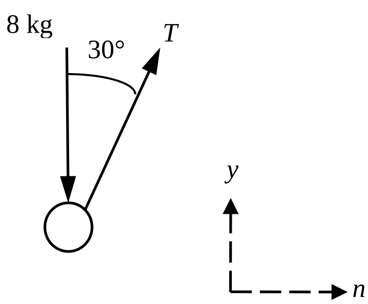
$$\boxed{R = 32.3 \text{ m}}$$

2.2.2 Componentes intrínsecas

16. Un péndulo cónico de 8 kg de peso tiene una cuerda de 1 m de longitud, que forma un ángulo de 30º con la vertical. ¿Cuál es la tensión de la cuerda? ¿Cuál es la rapidez lineal del péndulo?



Resolución



$$\sum Fy = 0$$

$$T\cos 30° - 8 = 0$$

$$T = \frac{8}{\cos 30°}$$

$$\boxed{T = 9.24\ \text{kg}}$$

$$\sum Fn = ma_n$$

$$T\text{sen}30° = \frac{8}{9.81}\frac{v^2}{\rho}$$

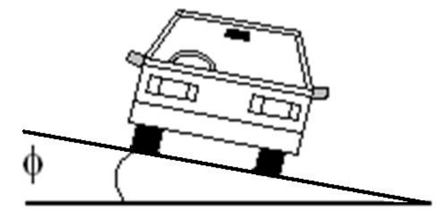
$$T\text{sen}30° = \frac{8}{9.81}\frac{v^2}{(1)\text{sen}30°}$$

$$v^2 = \frac{(9.81)T\ \text{sen}^2 30°}{8}$$

$$v = \sqrt{\frac{(9.81)T\ \text{sen}^2 30°}{8}}$$

$$\boxed{v = 1.683\ \text{m/s}}$$

17. Calcule el ángulo de peralte ϕ que debe tener la curva horizontal de una carretera para que los vehículos al transitar por ella no produzcan fuerzas de fricción sobre el pavimento. El radio de la curva es de 1000 ft y de 60 mi/h la velocidad de diseño.

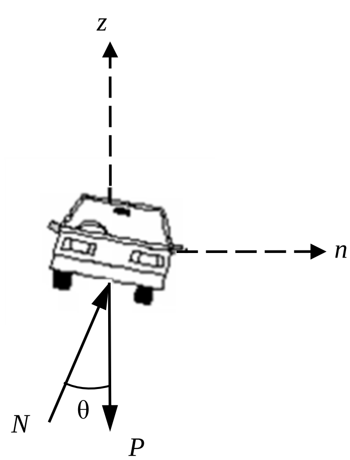


Resolución

Convertimos las $60\,{}^{\text{mi}}\!/\!_{\text{h}}$ a ${}^{\text{ft}}\!/\!_{\text{s}}$

$$60\frac{\text{mi}}{\text{h}} = 60\left(\frac{44}{30}\right)\frac{\text{ft}}{\text{s}} = 88\frac{\text{ft}}{\text{s}}$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de un vehículo en el que el pavimento sólo ejerce una fuerza normal.



El sistema de referencia requiere que el eje normal se dirija hacia el centro de la curva; y elegimos otro eje perpendicular a él (el eje tangencial es perpendicular al plano del dibujo).

$$\sum F_z = 0$$

$$N\cos\theta - P = 0$$

$$N = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\sum F_n = ma_n$$

$$N\text{sen}\theta = \frac{P}{32.2}\frac{v^2}{\rho}$$

Sustituyendo:

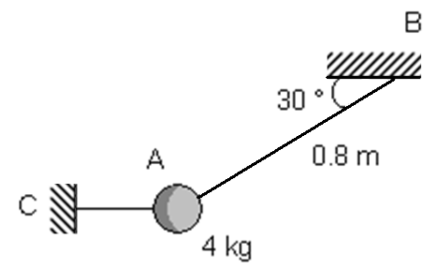
$$\frac{P}{\cos\theta}\text{sen}\theta = \frac{P}{32.2}\frac{(88)^2}{1000}$$

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{(88)^2}{32200}$$

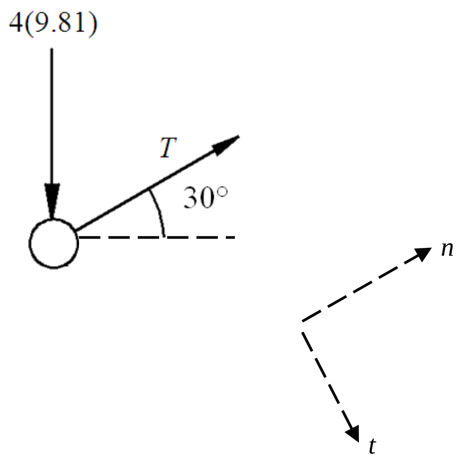
$$\tan\theta = \frac{(88)^2}{32200}$$

$$\boxed{\theta = 13.5^\circ}$$

18. Un cuerpo de 4 kg de masa se encuentra sujeto por dos cuerdas, una horizontal (AC) y otra (AB) de 0.8 m de largo, que forma un ángulo de 30º abajo de la horizontal. Determine la tensión que soportará la cuerda *AB* en el instante en que se corte la cuerda *AC*. Diga también cuál será la aceleración del cuerpo.



Resolución



$$\sum Fn = ma_n$$

$$T - 4(9.81)\mathrm{sen}\,\theta = 4a_n$$

$$T - 4(9.81)\mathrm{sen}\,\theta = 4\frac{v^2}{\rho}$$

$$T - 4(9.81)\mathrm{sen}\,\theta = 4\frac{v^2}{0.8}$$

$$T - 4(9.81)\mathrm{sen}\,\theta = 5v^2$$

Cuando $\theta = 30°$; $v = 0$

$$T - 4(9.81)\mathrm{sen}30° = 0$$

$$T = 4(9.81)\mathrm{sen}30°$$

$$\boxed{T = 19.62\ \mathrm{N}}$$

$$\sum Ft = ma_t$$

$$4(9.81)\cos\theta = 4a_t$$

Si $\theta = 30°$:

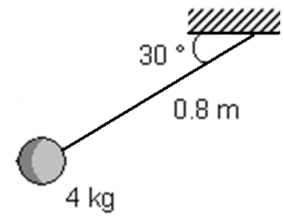
$$4(9.81)\cos 30° = 4a_t$$

$$a_t = \frac{4(9.81)\cos 30°}{4}$$

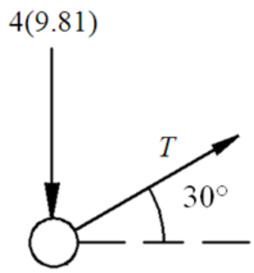
$$a_t = 8.49\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\boxed{a = 33.9\ \mathrm{m/s^2}\ \searrow\ 60°}$$

19. Un péndulo de 4 kg de masa comienza a oscilar cuando su cuerda, de 0.8 m de longitud, forma un ángulo de 30º abajo de la horizontal, como se muestra en la figura. ¿Cuál será la máxima rapidez que alcance? ¿Cuál, la tensión correspondiente de la cuerda?

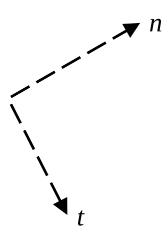


Resolución



Puesto que la rapidez del péndulo es variable, dibujaremos un diagrama de cuerpo libre que represente un instante arbitrario de su movimiento.

Utilizaremos un sistema de referencia intrínseco: el eje normal se dirige hacia el centro de la trayectoria circular del péndulo; y el tangencial tiene la dirección de la velocidad de éste.



$$\sum F_t = ma_t$$
$$4(9.81)\cos\ \theta = 4a_t$$

La máxima rapidez la alcanza cuando $a_t = 0$, o sea,

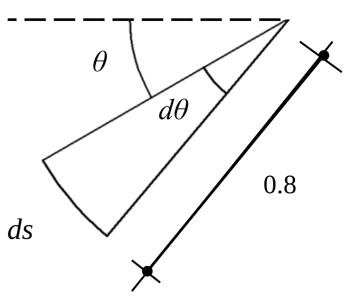
$$4\cos\theta = 0$$
$$\cos\theta = 0$$
$$\theta = 90°$$

Y para hallar esa rapidez, sustituimos

$$4(9.81)\cos\theta = 4v\frac{dv}{ds}$$

Simplificando

$$\cos\theta = \frac{1}{9.81}v\frac{dv}{ds}$$



Se puede relacionar el ángulo θ y el arco diferencial ds: el ángulo $d\theta$ es, como todo ángulo, la razón del arco al radio.

$$d\theta = \frac{ds}{0.8}$$
$$ds = 0.8d\theta$$

De donde:

$$\cos\theta = \frac{1}{9.81} v \frac{dv}{0.8 d\theta}$$

Separando variables:

$$0.8\cos\theta \ d\theta = \frac{1}{9.81} v dv$$

$$0.8\int \cos\theta \ d\theta = \frac{1}{9.81}\int v dv$$

$$0.8 \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2\ (9.81)} v^2 + C$$

Si $\theta = 30°$, $v = 0$

$$0.8\left(\frac{1}{2}\right) = C$$

De donde

$$0.8 \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2\ (9.81)} v^2 + 0.4$$

$$\frac{1}{2(9.81)} v^2 = 0.4\ \left(2 \operatorname{sen}\theta - 1\right)$$

$$v_{\max} = \sqrt{0.8(9.81)(1)}$$

$$\boxed{v_{\max} = 2.80\ \mathrm{m/s}}$$

$$\sum F_n = m a_n$$

$$T - 4(9.81)\ \operatorname{sen}\theta = 4\frac{v^2}{r}$$

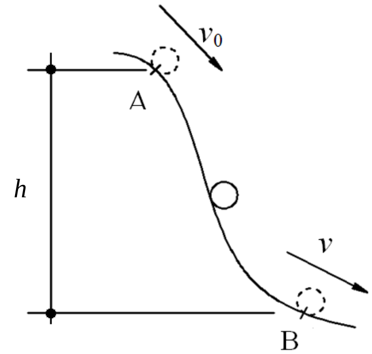
Para $\theta = 90°$ ($\operatorname{sen}\theta = 1$), $v = v_{\max}$ y $r = 0.8$

$$T = 4(9.81) + 4\left(\frac{0.8(9.81)}{0.8}\right)$$

$$T = 8(9.81)$$

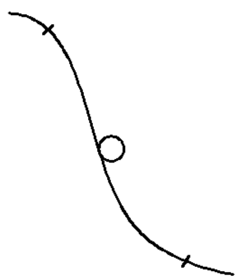
$$\boxed{T = 78.5\ \mathrm{N}}$$

20. Por el punto *A* de la superficie lisa mostrada en la figura, pasa una partícula de masa *m* con una rapidez v_0. Diga con qué rapidez *v* llegará al punto *B*, si la diferencia de nivel entre *A* y *B* es *h*.



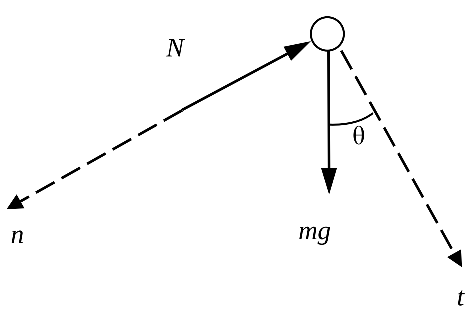
Resolución

Elegimos una posición arbitraria de la partícula, como la que se muestra en la figura, y dibujamos el diagrama de cuerpo libre.



Utilizamos un sistema de referencia intrínseco: el eje normal dirigido hacia el centro de la curva y el tangencial en dirección de la velocidad.

Como nos interesa conocer la rapidez, empleamos la ecuación:

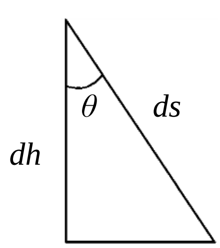


$$\sum F_t = ma_t$$

$$mg\cos\theta = mv\frac{dv}{ds}$$

$$g\cos\theta \; ds = vdv$$

Para poder integrar, relacionamos la longitud *ds* con el ángulo θ, como se ve en la figura:



$$\cos\theta = \frac{dh}{ds}$$

$$ds = \frac{dh}{\cos\theta}$$

Por tanto

$$g \; dh = v \; dv$$

$$g \int_A^B dh = v \int_{v_0}^{v} dv$$

$$gh = \left.\frac{v^2}{2}\right|_{v_0}^{v}$$

$$gh = \frac{v^2 - v_0{}^2}{2}$$

$$v^2 = v_o{}^2 + 2gh$$

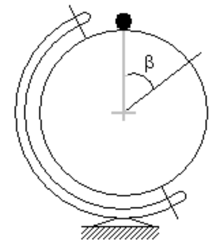
$$\boxed{v = \sqrt{v_o{}^2 + 2gh}}$$

Si $v_0 = 0$, se tiene

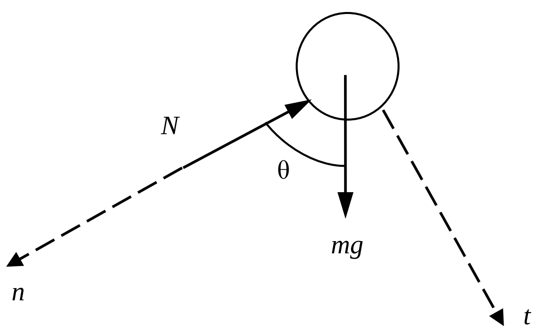
$$v = \sqrt{2gh}$$

Siempre que no haya fuerza de fricción.

21. Un niño coloca una canica en la parte alta de un globo terráqueo. Diga en qué ángulo β la canica abandona el globo y se convierte en proyectil. Desprecie toda fricción.



Resolución



Aunque la canica está originalmente en equilibrio, éste es tan inestable que el movimiento es inminente.

Dibujaremos un diagrama de cuerpo libre que represente cualquier instante del movimiento de la canica sobre la superficie del globo terráqueo.

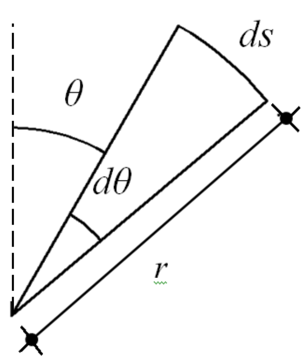
Elegimos un sistema de referencia intrínseco, con el eje normal hacia el centro del globo y el eje tangencial en dirección de la velocidad.

Puesto que la componente tangencial de la aceleración mide el cambio de magnitud de la velocidad, que es variable en este caso, comenzaremos con la siguiente ecuación.

$$\sum F_t = ma_t$$

$$mg\ \operatorname{sen}\theta = m\ v\frac{dv}{ds}$$

Se puede relacionar el ángulo θ y el arco diferencial *ds*, ya que todo ángulo se mide con la razón del arco al radio.



$$d\theta = \frac{ds}{r}$$

$$ds = rd\theta$$

De donde:

$$g\ \operatorname{sen}\theta = \frac{v}{r}\frac{dv}{d\theta}$$

$$gr\ \operatorname{sen}\theta\ d\theta = vdv$$

$$gr\int \operatorname{sen}\theta\ d\theta = \int vdv$$

$$-gr\cos\theta = \frac{v^2}{2} + C$$

Como $v = 0$ cuando $\theta = 0°$ ($\cos\theta = 1$)

$$-gr\ (1) = C$$
$$-gr\cos\theta = \frac{v^2}{2} - gr$$
$$\frac{v^2}{2} = gr - gr\cos\theta$$
$$v^2 = 2gr(1-\cos\theta)$$

Utilizando la otra ecuación cinética:

$$\sum F_n = ma_n$$
$$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{r}$$

Cuando la canica está a punto de separarse del globo,

$N = 0$ y $\theta = \beta$

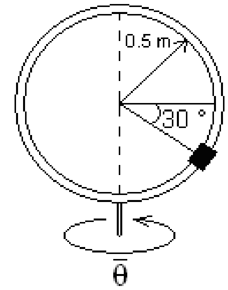
$$\cancel{m}g\cos\beta = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

Del resultado anterior:

$$g\cos\beta = \frac{2gr(1-\cos\beta)}{r}$$
$$\cos\beta = \frac{2gr(1-\cos\beta)}{gr}$$
$$\cos\beta = 2 - 2\cos\beta$$
$$3\cos\beta = 2$$
$$\cos\beta = \frac{2}{3}$$

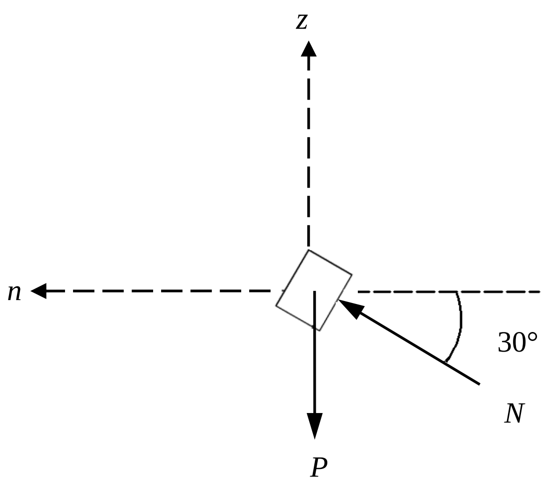
$$\boxed{\beta = 48.2°}$$

22. El aro liso de la figura, cuyo radio es de 0.5 m, gira con rapidez angular constante alrededor de un eje vertical. Calcule dicha rapidez angular, sabiendo que el collarín, aunque puede deslizarse libremente sobre el aro, mantiene fija su posición relativa a él.



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del collarín.



Como la trayectoria que describe es una circunferencia en el plano horizontal, el eje normal, que se dirige hacia el centro de la trayectoria, es también horizontal.

El eje tangencial es perpendicular al plano del dibujo y no aparece en el diagrama.

$$\sum F_Z = 0$$

$$N \text{ sen}30° - P = 0$$

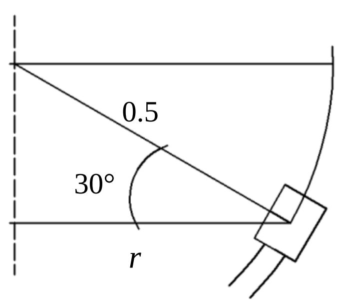
$$\frac{1}{2} N = P$$

$$\sum F_n = m a_n$$

$$N \cos 30 = \frac{P}{9.81} \dot{\theta}^2 r$$

$$2P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{P}{9.81} \dot{\theta}^2 r$$

$$\sqrt{3} = \frac{1}{9.81} \dot{\theta}^2 r$$



El radio de la trayectoria es

$$r = 0.5\cos 30° = \frac{0.5\sqrt{3}}{2} = 0.25\sqrt{3}$$

De donde

$$\sqrt{3} = \frac{1}{9.81}\dot{\theta}^2(0.25\sqrt{3})$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{9.81}{0.25}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = 6.26 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}}$$