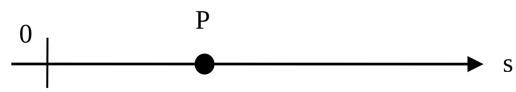
1. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

1.1 Movimiento rectilíneo

1.1.1 Posición en función del tiempo

1. La posición de una partícula que describe una línea recta queda definida mediante la expresión $s = t^3/3 - 9t + 2$, donde si t está en s, s resulta en m. Determine: *a)* la aceleración de la partícula cuando su velocidad es de 7 m/s; *b)* su velocidad media desde $t = 3$ hasta $t = 6$ s. *c)* Dibuje las gráficas *tiempo-posición*, *tiempo-velocidad* y *tiempo-aceleración* del movimiento de la partícula, durante los primeros seis segundos.



Resolución

Ecuaciones del movimiento

$$s = \frac{1}{3}t^3 - 9t + 2$$
$$v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 9$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 2t$$

a) Tiempo en que la velocidad es 7 m/s

$$7 = t^2 - 9$$
$$t^2 = 16$$
$$t = \pm 4$$

La raíz negativa no tiene significación física en este caso.

Para t = 4

$$a = 2(4)\ ; \quad \boxed{a = 8\ \mathrm{m/s^2} \rightarrow}$$

b)

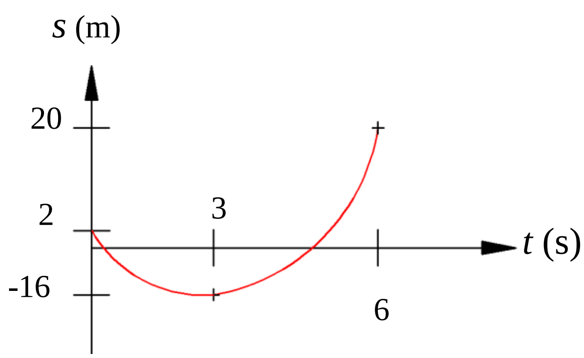
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_6 - s_3}{3}$$

$$s_6 = \frac{1}{3}(6)^3 - 9(6) + 2 = 20$$

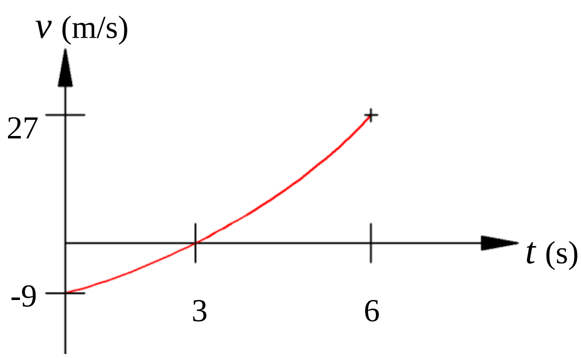
$$s_3 = \frac{1}{3}(3)^3 - 9(3) + 2 = -16$$

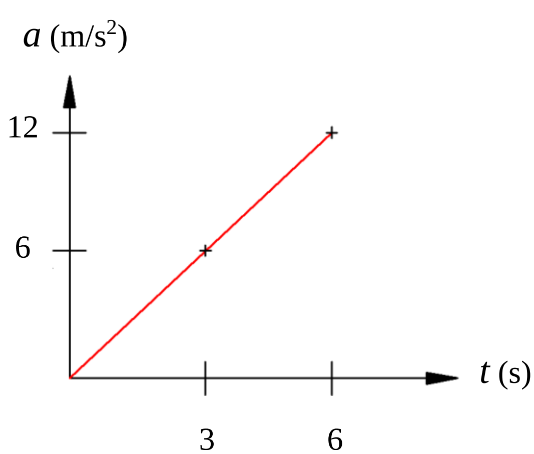
$$v_m = \frac{20 - (-16)}{3}\ ; \quad \boxed{v_m = 12\ \mathrm{m/s} \rightarrow}$$

c) Tabulación para dibujar las gráficas



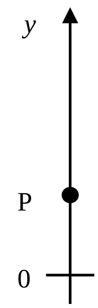
t	0	3	6
s	2	-16	20
v	-9	0	27
a	0	6	12





1.1.2 Velocidad en función del tiempo

2. La velocidad de un punto P que se mueve sobre el eje de las ordenadas, que es un eje vertical dirigido hacia arriba, se puede expresar como $v = 6\,t^2 - 24$, en donde v se da en ft/s y t en s; además, cuando $t = 0$, entonces $y = 6$ ft. Calcule: *a)* la magnitud y la dirección de la aceleración del punto cuando t = 3 s; *b)* el desplazamiento del punto P durante los primeros cuatro segundos; *c)* la longitud que recorre durante ese mismo lapso. *d)* Dibuje esquemáticamente las gráficas del movimiento del punto P.



Resolución

Ecuaciones del movimiento

Como $v = \frac{dy}{dt}$

entonces:

$$dy = v dt$$
$$\int dy = \int v dt$$
$$y = \int (6t^2 - 24) dt$$
$$y = \int (6t^2 - 24) dt$$
$$y = 2t^3 - 24t + C$$

Si $t = 0$, $y = 6$

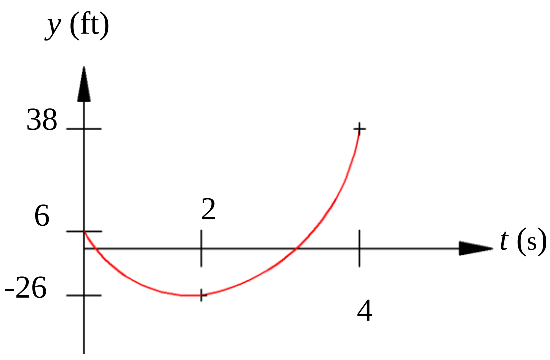
6 = C

Por tanto:

$$y = 2t^3 - 24t + 6$$
$$v = 6t^2 - 24$$
$$a = \frac{dv}{dt} = 12t$$

a) Para $t = 3$

$$a = 12(3);\quad \boxed{a = 36\ \mathrm{ft/s^2} \uparrow}$$



b)

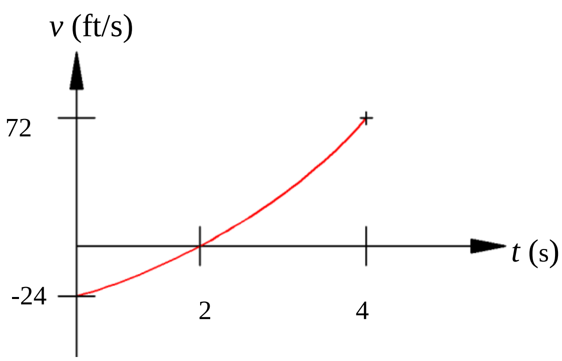
$$\Delta y = y_4 - y_0$$

En donde:

$$y_4 = 2(4)^3 - 24(4) + 6 = 38$$
$$y_0 = 6$$
$$\Delta y = 38 - 6$$

$$\boxed{\Delta y = 32 \text{ ft} \uparrow}$$

c) Para conocer la distancia que recorre, investigaremos cuando $v = 0$

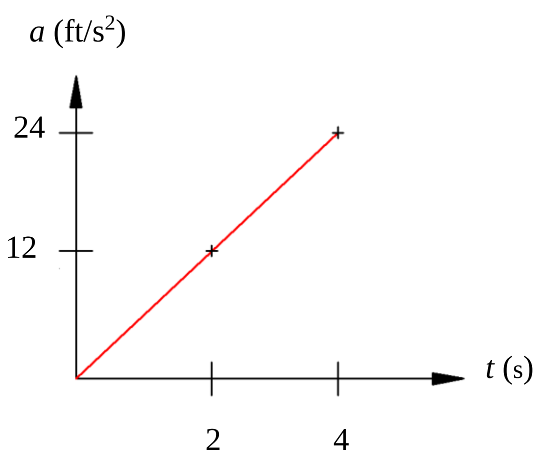


$$0 = 6t^2 - 24$$
$$t^2 = 4$$
$$t = \pm 2$$

Sólo la raíz positiva tiene significado físico

$$y_2 = 2(2)^3 - 24(2) + 6 = -26$$

Por tanto, la partícula se movió de $y_0 = 6$ a $y_2 = -26$ y luego a $y_4 = 38$

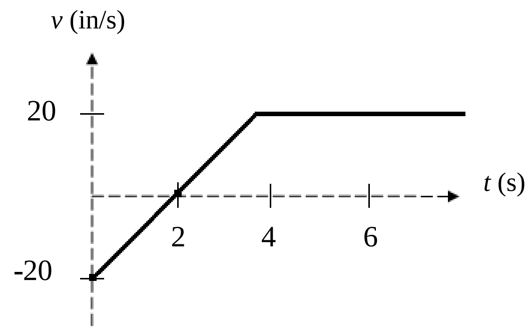


$$D = |\Delta y(0-2)| + |\Delta y(2-4)|$$
$$D = |-26-6| + |38-(-26)| = 32 + 64$$
$$D = 96 \text{ ft}$$

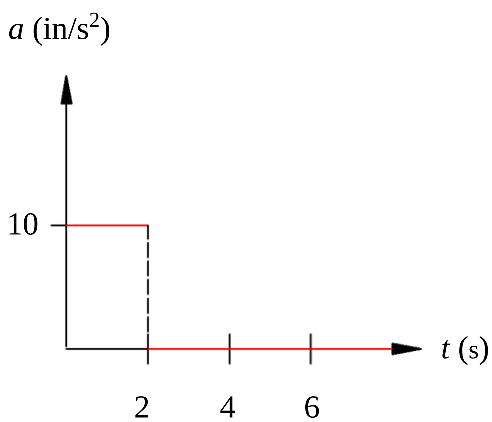
d) Tabulación para dibujar las gráficas

t	0	2	4
y	6	-26	38
v	-24	0	72
a	0	24	48

3. En la figura aparece la gráfica de la magnitud de la velocidad de una partícula en función del tiempo. Se sabe que cuando t = 0, la posición de la partícula es s = + 8 in. Dibuje las gráficas *tiempo-aceleración* y *tiempo-posición* del movimiento de la partícula.

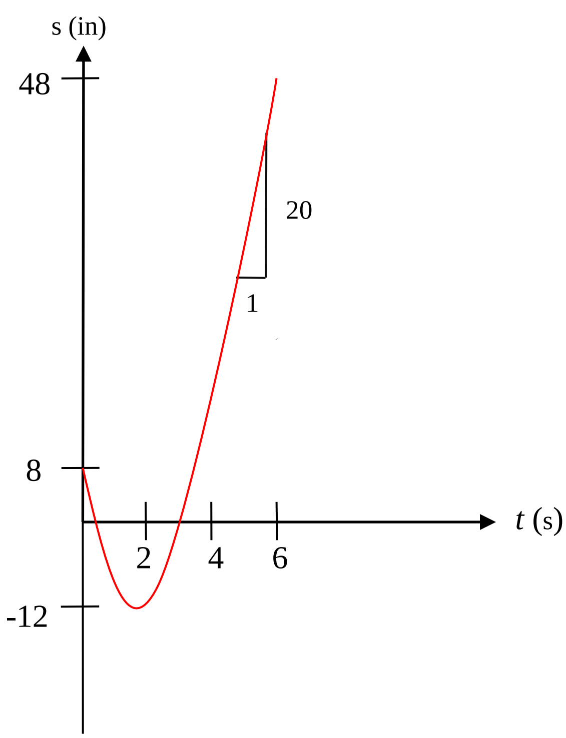


Resolución



La magnitud de la aceleración es igual a la pendiente de la gráfica *tiempo-velocidad*; durante los primeros cuatro segundos es positiva de 40/4 = 10 y después es nula.

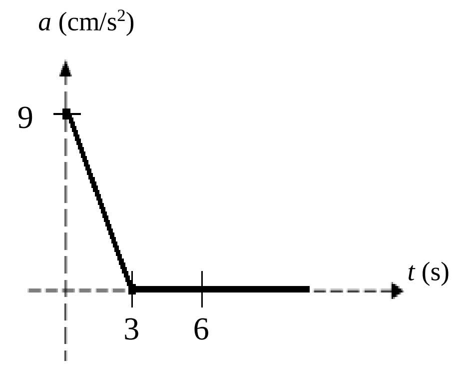
(La gráfica *tiempo-aceleración* puede ser discontinua como en este caso, pero nunca las gráficas *tiempo-velocidad* y *tiempo-posición*)



La gráfica *tiempo-posición* comienza, según los datos, en s = + 8. Desde t = 0 hasta t = 2, la pendiente de la curva que comienza siendo negativa, va disminuyendo en magnitud hasta hacerse nula: el desplazamiento en ese lapso es igual al área bajo la gráfica *tiempo-velocidad*, es decir 20. De 2 a 4 s el comportamiento de la gráfica es inverso al anterior y cuando t = 4, la partícula vuelve a su posición inicial, pues el área acumulada bajo la gráfica *tiempo-velocidad* es cero. De 4 a 6 s, la pendiente es constante, positiva y de 20, por tanto, se trata de una recta.

1.1.3 Aceleración en función del tiempo

4. La gráfica de la figura muestra la magnitud de la aceleración de una partícula que se mueve sobre un eje horizontal dirigido hacia la derecha, que llamaremos *x'x*. Sabiendo que cuando t = 1 s, x = 3 cm y v = − 4.5 cm/s, calcule: *a)* la posición de la partícula cuando su velocidad es nula; *b)* su velocidad cuando t = 3 s y su posición cuando t = 5 s.



Resolución

La partícula se mueve conforme a dos leyes distintas: una de 0 a 3 s y otra de 3 a 6 s.

Ecuaciones del movimiento de 0 a 3 s

$a = 9 - 3t$

Pues la ordenada al origen es 9 y la pendiente de la recta es -3.

Como $a = \frac{dv}{dt}$, entonces $dv = adt$

$dv = (9 - 3t)dt$

$\int dv = \int (9 - 3t)dt$

$v = 9t - 1.5t^2 + C_1$

Si $t = 1, v = -4.5$, conforme a los datos

$-4.5 = 9(1) - 1.5(1)^2 + C_1$; $C_1 = -12$

Por tanto

$v = 9t - 1.5t^2 - 12$

Como $v = \frac{dx}{dt}$, entonces $dx = vdt$

$dx = (9t - 1.5t^2 - 12)dt$

$\int dx = \int (9t - 1.5t^2 - 12)dt$

$x = 4.5t^2 - 0.5t^3 - 12t + C_2$

Si $t = 1$, $x = 3$

$$3 = 4.5(1)^2 - 0.5(1)^3 - 12(1) + C_2$$
$$C_2 = +11$$
$$x = 4.5t^2 - 0.5t^3 - 12t + 11$$

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento durante los primeros tres segundos son:

$$x = -0.5t^3 + 4.5t^2 - 12t + 11$$
$$v = -1.5t^2 + 9t - 12$$
$$a = -3t + 9$$

a) Investigamos si en algún instante la velocidad es nula

$$-1.5t^2 + 9t - 12 = 0$$

Dividiendo entre -1.5:

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

Factorizando

$$(t - 4)(t - 2) = 0$$
$$t_1 = 4$$
$$t_2 = 2$$

$t_1 = 4$ está fuera del intervalo: en $t_2 = 2$ s, $v = 0$ y en ese instante su posición es:

$$x = -0.5(2)^3 + 4.5(2)^2 - 12(2) + 11$$

$$\boxed{x = 1 \text{ cm}}$$

b) Para t = 3

$$v = -1.5(3)^2 + 9(3) - 12$$

$$\boxed{v = 1.5 \ \text{cm}/\text{s}}$$

c) Para investigar la posición en $t = 5$, se necesita la ecuación del movimiento de 3 a 6 s.

$a = 0$
$v = 1.5$ (la velocidad que alcanzó a los 3 s)
Si $t = 3$, $x = -0.5(3)^3 + 4.5(3)^2 - 12(3) + 11 = 2$

$2 = 1.5(3) + C_4$
$C_4 = -2.5$

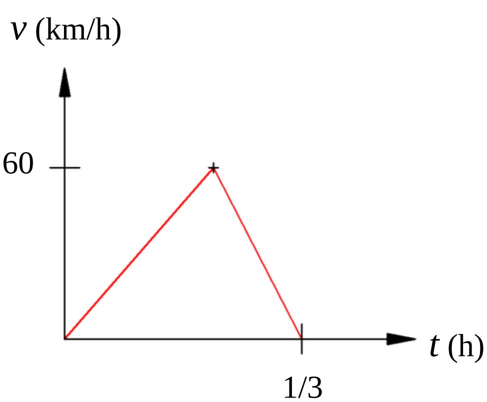
Por tanto:
$x = 1.5t - 2.5$

Para $t = 5$
$x = 1.5(5) - 2.5$;

$\boxed{x = 5 \text{ cm}}$

1.1.4 Soluciones gráficas

5. Un tren que parte de la estación *A* aumenta su velocidad uniformemente hasta alcanzar los 60 km/h. A partir de ese instante comienza a frenar, también uniformemente, hasta detenerse en la estación *B*. Si el viaje dura veinte minutos, ¿cuánto distan las estaciones *A* y *B*?



Resolución

Dibujamos la gráfica *tiempo-velocidad*. Como 20 min es igual a 1/3 de hora, 1/3 es el valor de la abscisa.

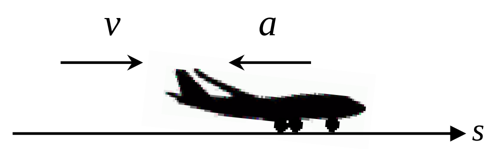
Puesto que $\Delta s = \int v dt$, entonces Δs es igual al área bajo la gráfica.

$$\Delta s = \frac{bh}{2} = \frac{1}{3}(60)\frac{1}{2} ;$$

$$\boxed{\Delta s = 10 \text{ km}}$$

1.1.5 Aceleración en función de la velocidad

6. La aceleración de un avión que aterriza en una pista a 50 m/s se puede expresar, para un cierto lapso, como $a = -4\,(10)^{-3}v^2$, donde si v está en m/s, a resulta en m/s^2. Determine el tiempo requerido para que el avión reduzca su velocidad a 20 m/s.



Resolución

Como la aceleración está en función de la velocidad y queremos conocer un tiempo, igualamos:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{-4}{1000}v^2 = \frac{dv}{dt}$$

Separando variables

$$\frac{-4}{1000}dt = \frac{dv}{v^2}$$

$$\frac{-1}{250}\int dt = \int \frac{dv}{v^2}$$

$$-\frac{t}{250} = -\frac{1}{v} + C$$

Condiciones iniciales: si $t = 0, v = 50$

$$0 = -\frac{1}{50} + C$$

$$C = \frac{1}{50}$$

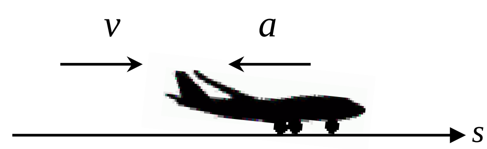
$$-\frac{t}{250} = -\frac{1}{v} + \frac{1}{50}$$

$$t = \frac{250}{v} - 5$$

Para $v = 20$

$$t = \frac{250}{20} - 5\ ; \quad \boxed{t = 7.5\ \text{s}}$$

7. Calcule la distancia que requiere el avión del problema anterior para reducir su velocidad de 50 a 20 m/s.



Resolución

Primer método

Partiendo de la solución de la ecuación diferencial del problema 6:

$$t = \frac{250}{v} - 5$$

Despejando *v* e igualando a *ds*/*dt*

$$t + 5 = \frac{250}{v}$$

$$v = \frac{250}{t+5}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{250}{t+5}$$

$$\int ds = 250\int \frac{dt}{t+5}$$

$$s = 250\mathrm{L}(t+5) + C$$

Hacemos s = 0 cuando t = 0

$$0 = 250\mathrm{L}5 + C$$

$$C = -250\mathrm{L}5$$

Por tanto

$$s = 250\mathrm{L}(t+5) - 250\mathrm{L}5$$

$$s = 250\left[\mathrm{L}(t+5) - \mathrm{L}5\right]$$

Por las propiedades de los logaritmos

$$s = 250\mathrm{L}\frac{t+5}{5}$$

Para t = 7.5

$$s = 250\mathrm{L}\frac{12.5}{5} = 250\mathrm{L}2.5$$

$$\boxed{s = 229 \text{ m}}$$

<u>Segundo método</u>

Como la aceleración es función de la velocidad y deseamos conocer un desplazamiento, igualamos:

$$a = v\frac{dv}{ds}$$

$$-\frac{4}{1000}v^2 = v\frac{dv}{ds}$$

$$-\frac{1}{250}v = \frac{dv}{ds}$$

Separando variables

$$-\frac{1}{250}ds = \frac{dv}{v}$$

$$-\frac{1}{250}\int ds = \int\frac{dv}{v}$$

$$-\frac{s}{250} = \mathrm{L}v + C$$

Si $s = 0$, $v = 50$

$$0 = 50\mathrm{L} + C$$

$$C = -50\mathrm{L}$$

$$-\frac{s}{250} = \mathrm{L}v - L50$$

$$\frac{s}{250} = -\mathrm{L}v + \mathrm{L}50$$

$$\frac{s}{250} = \mathrm{L}\frac{50}{v}$$

$$s = 250\mathrm{L}\frac{50}{v}$$

Para $v = 20$

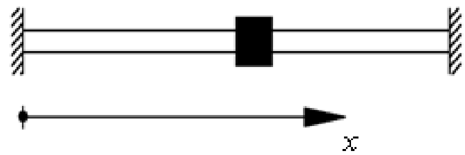
$$s = 250\mathrm{L}\frac{50}{v}$$

$$s = 250\mathrm{L}2.5$$

$$\boxed{s = 229\ \text{m}}$$

1.1.6 Aceleración en función de la posición

8. La magnitud de la aceleración de un collarín que se desliza sobre una barra horizontal se expresa, en función de su posición, como $a = 12\sqrt{x}$, donde a se da en in/s^2 y x en in. Cuando t = 2 s, entonces v = 32 in/s y x = 16 in. Determine la posición, la velocidad y la aceleración del collarín cuando t = 3s.



Resolución

Como la aceleración está expresada en función de la posición, se sustituye por $v\dfrac{dv}{dx}$

$$v\frac{dv}{dx} = 12\sqrt{x}$$

Separando variables

$$v\,dv = 12\sqrt{x}\,dx$$

$$\frac{v^2}{2} = 12\left(\frac{2}{3}\right)x^{3/2} + C_1 = 8x^{3/2} + C_1$$

Si x = 16, v = 32 De los datos

$$\frac{32^2}{2} = 8(16)^{3/2} + C_1$$

$$512 = 512 + C_1\ ; \quad C_1 = 0$$

$$\frac{v^2}{2} = 8x^{3/2}$$

$$v = 4x^{3/4}$$

Sustituimos v por $\dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = 4x^{3/4}$$

Separando variables

$$x^{-3/4}dx = 4dt$$

$$\int x^{-3/4}dx = 4\int dt$$

$$4x^{1/4} = 4t + C_2$$

Si t = 2, x = 16

De los datos

$$8 = 8 + C_2 \; ; \quad C_2 = 0$$

$$4x^{1/4} = 4t$$

$$x^{1/4} = t$$

$x = t^4$ La ecuación queda resuelta.

Derivando respecto al tiempo

$$v = 4t^3$$

$$a = 12t^2$$

Satisface la ecuación original, ya que si:

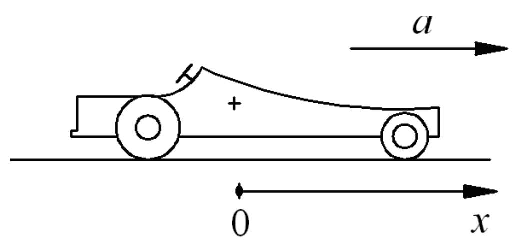
$x = t^4$, $\sqrt{x} = t^2$, o sea, $a = 12\sqrt{x}$

Para t = 3

$$\boxed{\begin{array}{l} x = 81 \text{ in} \rightarrow \\ v = 108 \text{ in/s} \rightarrow \\ a = 108 \text{ in/s}^2 \rightarrow \end{array}}$$

1.2 Movimientos rectilíneos uniforme y uniformemente acelerado

9. El motor de un automóvil de carreras es capaz de imprimirle, durante cierto lapso, una aceleración constante de 5.2 m/s^2. Si el automóvil está inicialmente en reposo, diga: a) cuánto tiempo le lleva alcanzar una velocidad de 300 km/h; b) qué distancia requiere para ello.



Resolución

Ecuaciones del movimiento

$$a = 5.2$$
$$v = 5.2\int dt = 5.2t$$
$$x = 5.2\int t\,dt = 2.6t^2$$

Las constantes de integración son nulas, pues cuando $t = 0$ tanto v como x son nulas.

a)

$$300\ \mathrm{km}/\mathrm{h} = \frac{300}{3.6}\ \mathrm{m}/\mathrm{s} = v$$

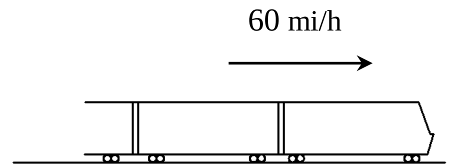
$$\frac{300}{3.6} = 5.2t$$

$$t = \frac{300}{3.6(5.2)}\ ;\quad \boxed{t = 16.03\ \mathrm{s}}$$

b)

$$x = 2.6(16.03)^2\ ;\quad \boxed{x = 669\ \mathrm{m}}$$

10. Un tren del metro, que viaja a 60 mi/h, emplea 250 ft para detenerse, frenando uniformemente. ¿Cuál es la aceleración del tren mientras frena?



Resolución

$$60 \ {}^{mi}\!/\!_{h} = 88 \ {}^{ft}\!/\!_{s}$$

Como se desea conocer la aceleración a partir de la velocidad y el desplazamiento, empleamos:

$$a = v\frac{dv}{ds}$$
$$ads = vdv$$
$$a\int ds = \int vdv$$

Puesto que *a* es constante, queda fuera de la integral.

$$as = \frac{v^2}{2} + C$$

Elegimos como origen el punto en el que comienza a frenar el tren.

Si $s = 0$, $v = 88$

$$0 = \frac{88^2}{2} + C \quad ; \quad C = -\frac{88^2}{2}$$

$$as = \frac{v^2 - 88^2}{2} \quad ; \quad a = \frac{v^2 - 88^2}{2s}$$

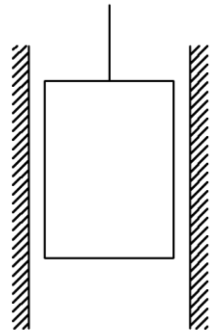
Para $s = 250$ y $v = 0$

$$a = -\frac{88^2}{500} = -15.49$$

El signo indica que tiene sentido contrario al de la velocidad:

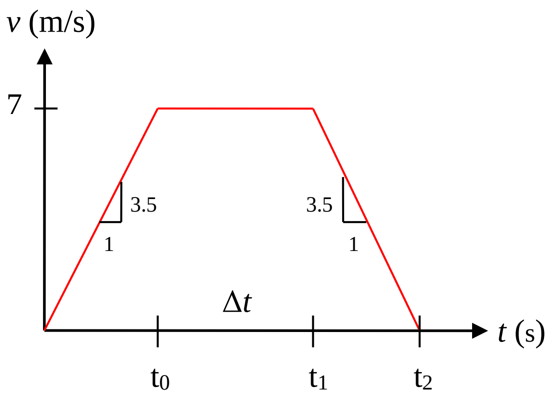
$$\boxed{a = 15.49 \ {}^{ft}\!/\!_{s^{\,}} \leftarrow}$$

11. Un elevador comercial puede, a lo más, tanto aumentar como disminuir su velocidad a razón de 3.5 m/s^2. Y la máxima velocidad que puede alcanzar es de 420 m/min. Calcule el tiempo mínimo que necesita para subir quince pisos, partiendo del reposo, si cada piso tiene 5.1 m de altura.



Resolución

Supongamos que el elevador alcanza una velocidad máxima y la mantiene cierto tiempo Δt, como se muestra en la gráfica



$$420\,{}^{\text{m}}\!/\!_{\text{min}} = \frac{420}{60}\,{}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}} = 7\,{}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}}$$

La pendiente de la recta inclinada es 3.5, que es la razón de cambio de la velocidad. Por lo tanto de la gráfica y por semejanza de triángulos:

$$\frac{1}{t_0} = \frac{3.5}{7} \;;\quad t_0 = 2 = t_2 - t_1$$

El elevador debe desplazarse

$$\Delta y = 15(5.1) = 76.5$$

Tal desplazamiento es igual al área del trapecio en la gráfica

$$\frac{(b+B)h}{2} = \frac{(\Delta t + \Delta t + 4)7}{2} = 76.5$$

$$\frac{14\Delta t + 28}{2} = 76.5$$

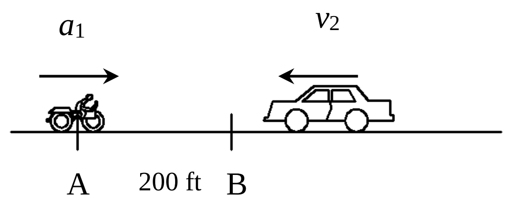
$$7\Delta t = 62.5 \;;\quad \Delta t = 8.93$$

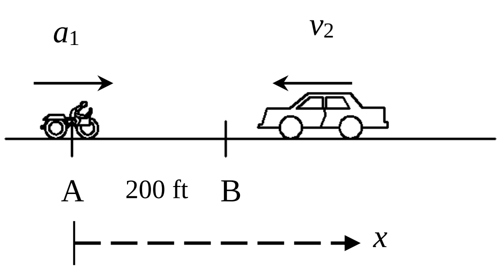
El tiempo total es

$$\boxed{t_2 = 12.93\ \text{s}}$$

1.2.1 Movimiento de varias partículas independientes

12. Un motociclista arranca del punto *A* con una aceleración constante a_1 = 2.4 ft/s^2 hacia la derecha. Cuatro segundos después, un automóvil pasa por el punto *B*, situado a 200 ft de *A*, viajando hacia la izquierda. Sabiendo que la velocidad del automóvil es v_2 = 30 ft/s y constante, diga en dónde el motociclista encuentra el automóvil. Desprecie el tamaño de los vehículos.





Resolución

Tomando como origen el punto A, eligiendo un eje *x'x* hacia la derecha y tomando como $t = 0$ el instante en que arranca el motociclista, las ecuaciones del movimiento son:

Motociclista

$$a_1 = 2.4$$
$$v_1 = \int a_1 dt = 2.4t$$
$$x_1 = \int v_1 dt = 1.2t^2$$

Las constantes de integración son nulas.

Automóvil

$$a_2 = 0$$
$$v_2 = -30$$

Negativa, porque el sentido es contrario al del eje elegido.

$$x_2 = \int v_2 dt = -30t + C$$

Cuando $t = 4$, $x_2 = 200$ de los datos, sustituyendo

$$200 = -30(4) + C;\ C = 320$$
$$x_2 = -30t + 320$$

El motociclista encuentra el automóvil si:

$$x_1 = x_2$$

$$1.2t^2 = -30t + 320$$

$$1.2t^2 + 30t - 320 = 0$$

$$t = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 + 4(1.2)320}}{2.4}$$

$$t_1 = 8.06$$

$$t_2 = -33.1$$

Sustituyendo t_1 en x_1

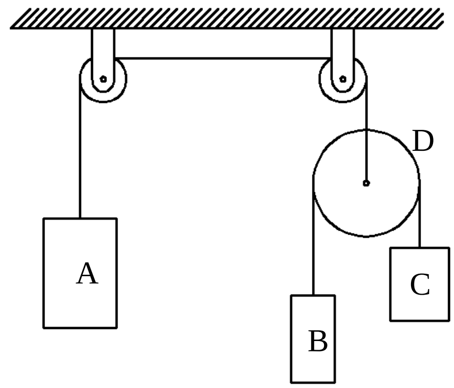
$$x_1 = 1.2(8.06)^2 = 78.1$$

El motociclista encuentra al automóvil a 78.1 ft a la derecha de A.

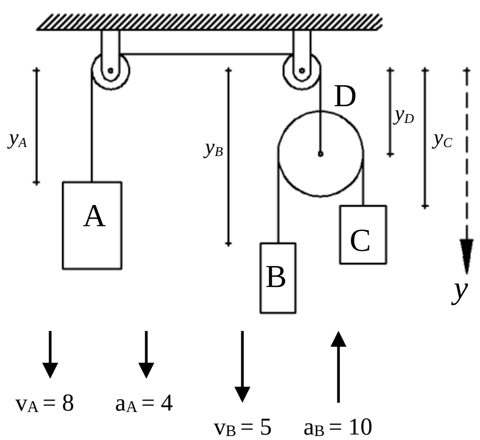
$$\boxed{x_A = 78.1 \text{ ft} \rightarrow}$$

1.2.2 Movimiento de varias partículas conectadas

13. El cuerpo *A* se desplaza hacia abajo con una velocidad de 8 m/s, la cual aumenta a razón de 4 m/s^2, mientras *B* baja a 5 m/s, que disminuye a razón de 10 m/s^2. Calcule la magnitud y la dirección tanto de la velocidad como de la aceleración del cuerpo *C*.



Resolución



Velocidad

Cuerda que une los cuerpos A y D

$$l_1 = y_A + y_D$$

Derivando respecto al tiempo

$$0 = v_A + v_D \ ; \ \ v_D = -v_A \quad (1)$$

Cuerda que une B con C

$$l_2 = (y_B - y_D) + (y_C - y_D)$$

$$l_2 = y_B + y_C - 2y_D$$

Derivando respecto al tiempo

$$0 = v_B + v_C - 2v_D$$

De (1)

$$0 = v_B + v_C + 2v_A$$

$$v_C = -v_B - 2v_A \qquad (2)$$

Sustituyendo:

$$v_C = -5 - 2(8) = -21$$

El signo negativo indica que el sentido es contrario al del eje *y'y*

$$\boxed{v_C = 21 \ \mathrm{m/s} \uparrow}$$

Aceleración

Derivando la ecuación (2) respecto al tiempo:

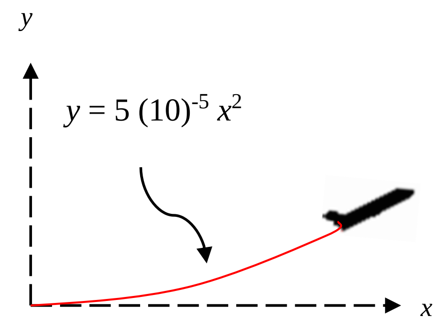
$$a_C = -a_B - 2a_A$$
$$a_C = -(-10) - 2(4) = 2$$

$$\boxed{a_C = 2 \ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}^2} \ \downarrow}$$

1.3 Movimiento curvilíneo

1.3.1 Componentes cartesianas

14. Un avión de pruebas describe, inmediatamente después de despegar, una trayectoria cuya ecuación cartesiana es $y = 5\,(10)^{-5}\,x^2$. Se mueve conforme la expresión $x = 150t + 5t^2$, donde t está en s, x resulta en m. Determine la posición, velocidad y aceleración del avión cuando $t = 10$ s.



Resolución

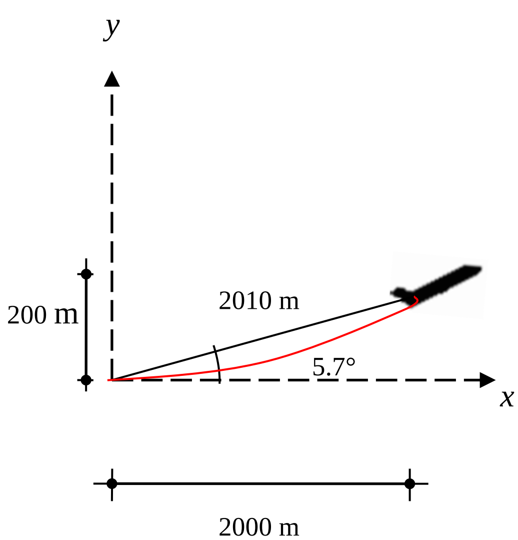
Las ecuaciones de las componentes horizontales del movimiento son:

$$x = 150t + 5t^2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 150 + 10t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 10$$

Sustituyendo x en la ecuación de la trayectoria, se obtienen las ecuaciones de las componentes verticales



$$y = 5\times10^{-5}(150t + 5t^2)^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 10\times10^{-5}(150 + 10t)(150t + 5t^2)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 10^{-4}\left[(150 + 10t)^2 + 10(150t + 5t^2)\right]$$

Para $t = 10$ s

$$x = 1500 + 500 = 2000$$

$$y = 5\times10^{-5}(2000)^2 = 200$$

En forma vectorial:

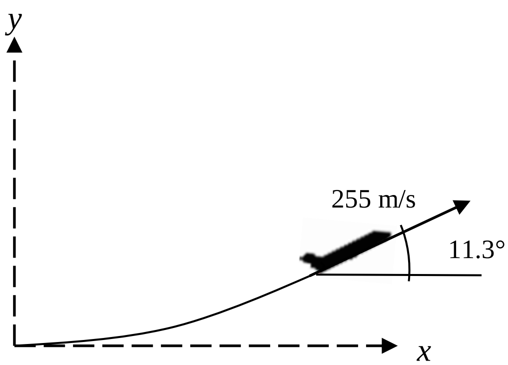
$$\bar{r} = 2000i + 200j \quad [\text{m}]$$

Escalarmente:

$$r = \sqrt{2000^2 + 200^2}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{200}{2000};\quad \theta_1 = 5.7°$$

$$\boxed{r = 2010\ \text{m}\ \measuredangle\ 5.7°}$$ Es la posición del avión



$$v_x = 150 + 10(10) = 250$$

$$v_y = 1\times10^{-4}(250)(2000) = 50$$

Vectorialmente:

$$\bar{v} = 250i + 50j\ \ [\text{m}]$$

Escalarmente:

$$v = \sqrt{250^2 + 50^2}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{50}{250};\quad \theta_2 = 11.3°$$

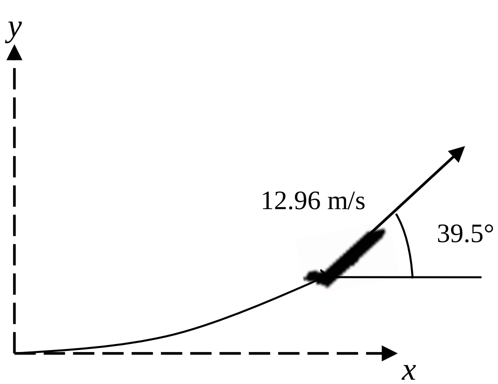
$$\boxed{v = 255\ \text{m}/\text{s}\ \measuredangle\ 11.3°}$$ Es la velocidad del avión

$$a_x = 10$$

$$a_y = 1\times10^{-4}\left[250^2 + 10(2000)\right] = 8.25$$

Vectorialmente:

$$\bar{a} = 10i + 8.25j\ \ \left[\text{m}/\text{s}^2\right]$$



Escalarmente:

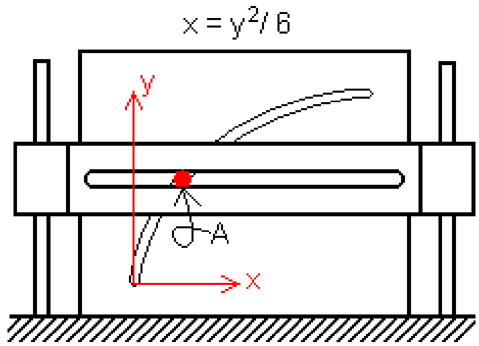
$$a = \sqrt{10^2 + 8.25^2}$$

$$\tan\theta_3 = \frac{8.25}{10};\quad \theta_3 = 39.5°$$

$$\boxed{a = 12.96\ \text{m}/\text{s}^2\ \measuredangle\ 39.5°}$$

Es la aceleración del avión cuando t = 10 s

15. La corredera *A* se mueve dentro de la ranura conforme se eleva el brazo horizontal, que tiene una velocidad constante de 3 in/s. Calcule la velocidad y la aceleración de la corredera cuando $x = 6$ in.



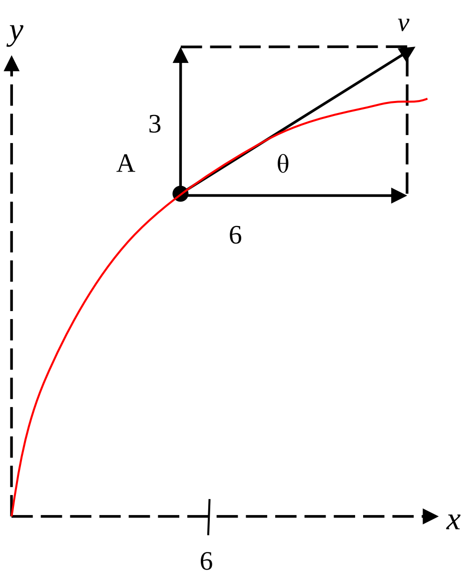
Resolución

Como el brazo se mueve hacia arriba con velocidad constante:

$$a_y = 0$$
$$v_y = 3$$

Y, por tanto:

$$y = \int v_y dt = 3t$$



La relación entre las coordenadas de la posición está establecida por la ecuación de la trayectoria:

$$x = \frac{1}{6}y^2$$

$x = \frac{1}{6}(3t)^2$ Sustituimos y por el valor en función de t

$$x = 1.5t^2$$

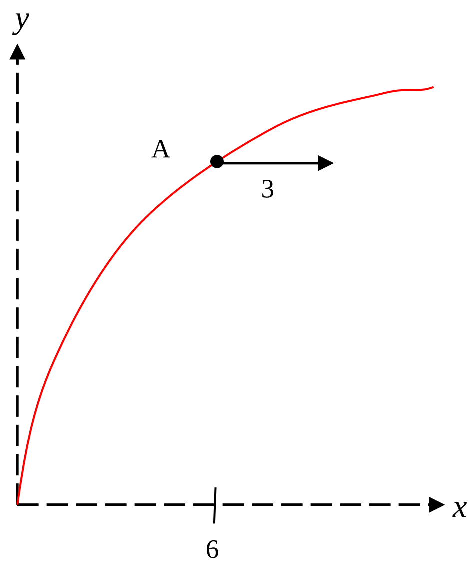
$v_x = 3t$ Derivando respecto al tiempo

$$a_x = 3$$

Con las ecuaciones del movimiento a la vista, podemos responder a la pregunta.

Si $x = 6$
$$6 = 1.5t^2$$
$$t = \sqrt{4} = \pm 2$$

a raíz negativa no tiene significado físico.



Para $t = 2$

$$v_x = 3(2) = 6$$
$$v_y = 3$$
$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6.71$$
$$\tan\theta = \frac{3}{6}$$
$$\theta = 26.6^\circ$$

$$\boxed{v = 6.71 \ {}^{\text{in}}\!/\!_{\text{s}} \ \measuredangle\, 26.6^\circ}$$

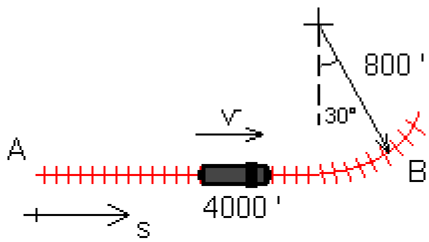
Para el mismo instante

$$a_x = 3$$
$$a_y = 0$$

$$\boxed{a = 3 \ {}^{\text{in}}\!/\!_{\text{s}^2} \ \rightarrow}$$

1.3.2 Componentes intrínsecas

16. Una locomotora comienza a moverse desde el punto *A* conforme a la expresión $s = 4t^2$, donde *t* está en s y *s* es la longitud en ft medida sobre la vía a partir de *A*. El punto *B* se halla a 4000 ft de *A* y su radio de curvatura es de 800 ft. Diga: *a)* cuál es la velocidad de la locomotora en *B*; *b)* cuál es su aceleración en *A*; *c)* cuál, en *B*.



Resolución

Derivando la expresión de la longitud recorrida respecto al tiempo, obtenemos:

$$s = 4t^2$$

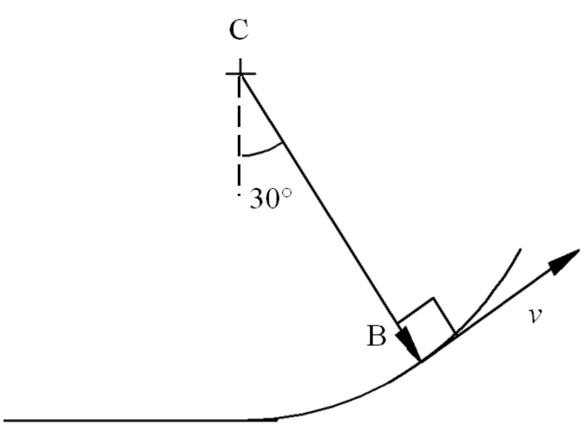
$$v = \frac{ds}{dt} = 8t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 8$$

a) El tiempo que tarda en llegar a B es:

$$4000 = 4t^2$$

$$t = \sqrt{1000}$$



Su velocidad por tanto, tiene una magnitud de:

$$v = 8\sqrt{1000} = 253$$

$$\boxed{v = 253\ \mathrm{ft/s}\ \measuredangle 30^\circ}$$

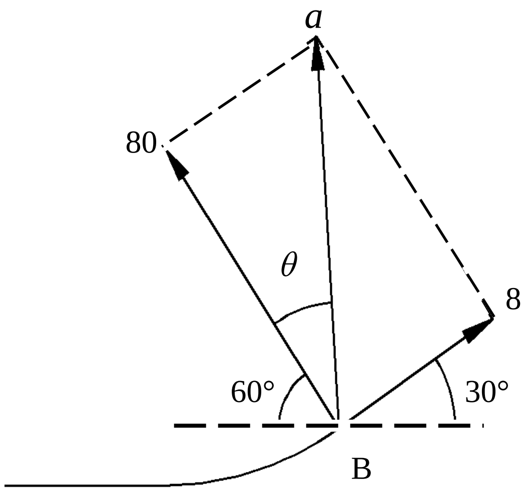
La dirección es perpendicular al radio de la curva, pues debe ser tangente a la trayectoria.

b) Como el punto A está en un tramo recto

$$a = a_t$$

$$\boxed{a = 8\ \mathrm{ft/s} \rightarrow}$$

Su dirección es la de la trayectoria.



c) En el punto B la aceleración de la locomotora tiene tanto componente tangencial como normal, porque pertenece a una curva:

$a_t = 8 \quad \angle 30°$ En dirección de la velocidad

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(253)^2}{800} = 80 \quad 60°$$

Dirigida hacia el centro de curvatura

$$a = \sqrt{8^2 + 80^2} = 80.4$$

Sea θ el ángulo que forma con la velocidad

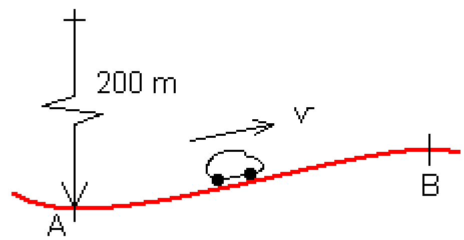
$$\tan\theta = \frac{8}{80} = 0.1 \; ; \quad \theta = 5.7°$$

Respecto a la horizontal, por tanto, forma un ángulo de:

$$60° + 5.7° = 65.7°$$

$$\boxed{a = 80.4 \ \mathrm{ft/s^2} \quad 65.7°}$$

17. Un automóvil viaja por la carretera de la figura aumentando uniformemente su velocidad. Pasa por *A* con una rapidez de 72 km/h y llega a *B* a 108 km/h, cinco segundos después. Determine: *a)* la aceleración del automóvil al pasar por *A*; *b)* el radio de curvatura de la carretera en la cima *B*, sabiendo que allí la aceleración del vehículo es de 4 m/s^2.

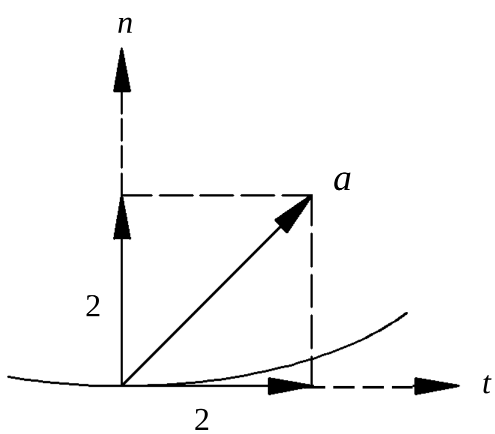


Resolución

$$72 \ \mathrm{km/h} = \frac{72}{3.6} \ \mathrm{m/s} = 20 \ \mathrm{m/s}$$

$$108 \ \mathrm{km/h} = \frac{108}{3.6} \ \mathrm{m/s} = 30 \ \mathrm{m/s}$$

Como la rapidez aumenta uniformemente, i.e., la componente tangencial de la aceleración es constante, tanto en A como en B:



$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{\Delta t}$$

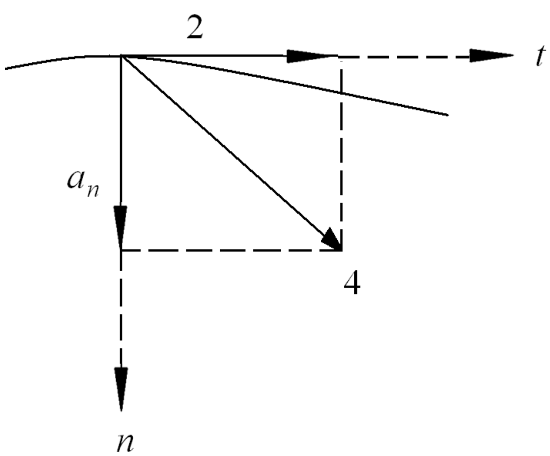
$$a_t = \frac{30 - 20}{5} = 2$$

a) Al pasar por A

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{20^2}{200} = 2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{2(2^2)} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{a = 2.83 \ \mathrm{m/s^2} \quad \measuredangle \ 45°}$$



b) Al pasar por B

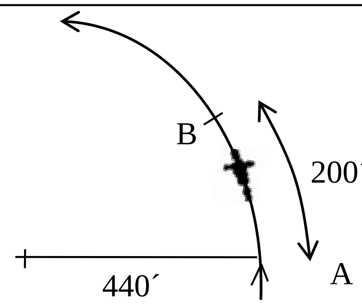
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \ ; \ a^2 = a_n^2 + a_t^2$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t{}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3.46$$

Como $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$; $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

$$\rho = \frac{30^2}{3.46} \quad ; \quad \boxed{\rho = 260\text{m}}$$

18. Un motociclista que corre en una pista circular de 440 ft de radio pasa por *A* a 60 mi/h; en *B*, 200 ft adelante, su velocidad es de 30 mi/h. Sabiendo que el motociclista reduce uniformemente su velocidad, calcule su aceleración cuando se encuentra en *A*.



Resolución

$$60\ \text{mi/h} = 88\ \text{ft/s}$$
$$30\ \text{mi/h} = 44\ \text{ft/s}$$

Como la reducción de la rapidez es uniforme, la componente tangencial de la aceleración es la misma en cualquier instante. Como se conoce la función de la distancia recorrida:

$$a_t = v\frac{dv}{ds}$$
$$a_t ds = v dv$$
$$a_t \int ds = \int v dv$$

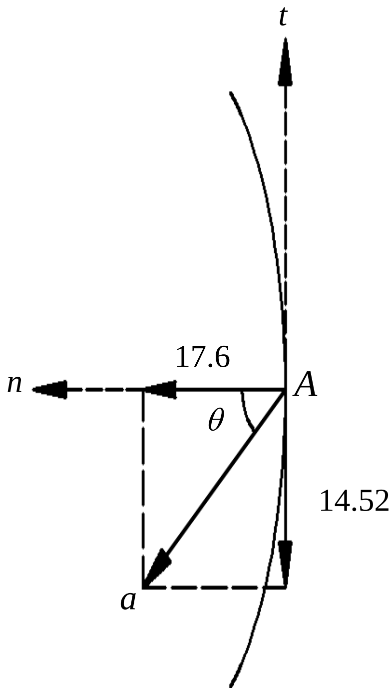
Por ser constante, a_t queda fuera de la integral.

$$a_t s = \frac{v^2}{2} + C$$

Si $s = 0$, $v = 88$

Tomaremos como origen el punto *A*

$$0 = \frac{88^2}{2} + C$$
$$C = -\frac{88^2}{2}$$
$$a_t s = \frac{v^2 - 88^2}{2} = \frac{44^2 - 88^2}{2}$$
$$a_t = \frac{v^2 - 88^2}{2(200)} = -14.52$$



En el punto *A* la componente normal es:

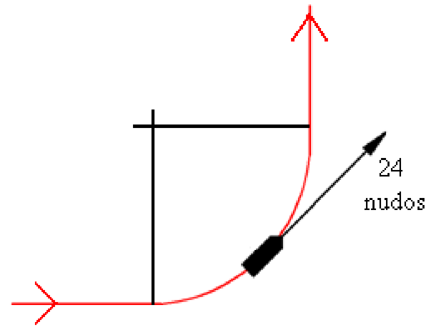
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{88^2}{440} = 17.6$$

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{14.52^2 + 17.6^2} = 22.8$$

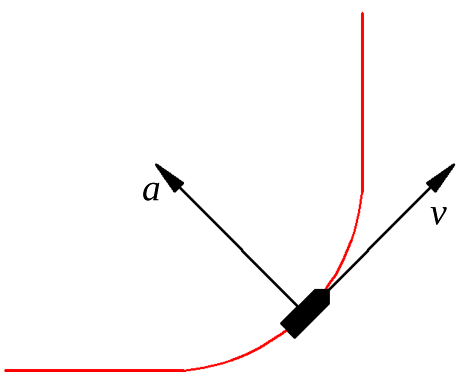
$$\tan\theta = \frac{14.52}{17.6} \quad ; \quad \theta = 39.5º$$

$$\boxed{a = 22.8\ \mathrm{ft}/\mathrm{s}^2 \quad ⦫\ 39.5º}$$

19. Un buque navega con rapidez constante de 24 nudos. Para dirigirse al puerto vira 90° en un minuto. Determine la magnitud de la aceleración del buque durante la maniobra.



Resolución



Puesto que la magnitud de la velocidad no varía durante la maniobra:

$$a_t = 0$$

Por tanto

$$a = a_n = \dot{\theta} v$$

Donde $\dot{\theta}$ es la velocidad angular.

$$\dot{\theta} = 90 \ {}^{\text{grados}}\!/_{\text{min}} = \frac{\pi/2}{60} \ {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}}$$

Además:

$$24 \ \text{nudos} = 24 \frac{\text{millas marítimas}}{\text{hora}} = 24 \frac{1852}{3600} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Por tanto:

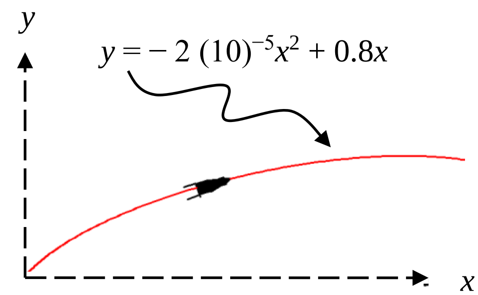
$$a = \frac{\pi}{120}(24)\frac{1852}{3600} = 0.323$$

$$\boxed{a = 0.323 \ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}^2}}$$

Y es perpendicular a la velocidad en cualquier instante.

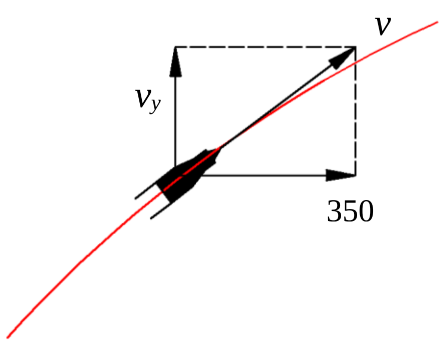
1.3.3 Componentes cartesianas e intrínsecas relacionadas

20. La trayectoria de un cohete interplanetario tiene la ecuación $y = -\,2\ (10)^{-5}x^2 + 0.8x$. La componente horizontal de su velocidad es constante y de 350 m/s. Calcule la razón del cambio de la magnitud de su velocidad con respecto al tiempo, cuando $x = 9000$ m.



Resolución

<u>Primer método</u>



$$y = -2(10)^{-5}x^2 + 0.8x$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dy}{dx}$$

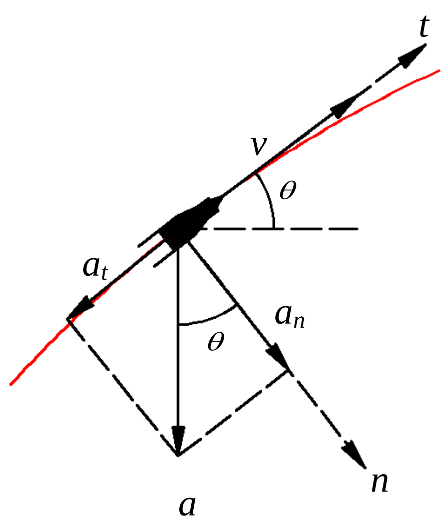
Como la componente horizontal de la velocidad es:

$$v_x = 350$$

$$v_y = 350\left[-4(10)^{-5}x + 0.8\right] = -0.014x + 280$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_y}{dx}$$

$$a_y = 350^2\left[-4(10)^{-5}\right] = -4.9\ \mathrm{m/s^2}$$



La razón del cambio de magnitud de la velocidad con respecto al tiempo la mide la componente tangencial de la aceleración.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Como dicha componente tiene la dirección de la velocidad, investigamos ésta.

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

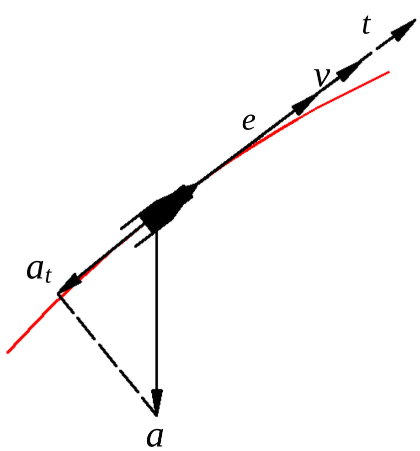
Para $x = 900$: $v_y = 154$, $v_x = 350$

$$\tan\theta = \frac{154}{350}$$

$$\theta = 23.7°$$

θ es el ángulo que forma la velocidad con la horizontal, y es el mismo que forma la aceleración con su componente normal. Proyectamos la aceleración en el eje tangencial.

$$a_t = -4.9 \ \text{sen}\theta = -1.973$$



La magnitud de la velocidad disminuye a razón de 1.973 m/s^2

Segundo método

Escribiendo en lenguaje vectorial

$$\bar{v} = v_x i + v_y j = 350i + 154j$$
$$\bar{a} = a_x i + a_y j = -4.9j$$

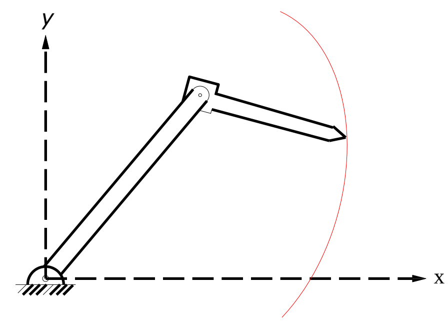
Para proyectar la aceleración en el eje tangencial, investigamos el producto escalar (o producto punto) de dos vectores.

$$\bar{a}_t = \bar{a} \cdot e_t$$

En donde e_t es un vector unitario en dirección de la velocidad

$$a_t = \frac{\bar{a} \cdot \bar{v}}{v} = \frac{154(-4.9)}{\sqrt{350^2 + 154^2}} = -1.973$$

21. Las ecuaciones paramétricas de las coordenadas de la punta de un brazo mecánico son $x = 25t - 4t^2$ y $y = 50 - 2t^2$; ambas resultan en ft, si el tiempo está en s. Diga qué longitud tiene el radio de curvatura de la trayectoria de la punta cuando $y = 0$.



Resolución

Primer método

Para hallar el radio de curvatura, se requiere conocer la magnitud de la componente normal de la aceleración y la magnitud de la velocidad.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Las ecuaciones del movimiento son:

$$x = 25t - 4t^2$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 25 - 8t$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -8$$

$$y = 50 - 2t^2$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -4t$$

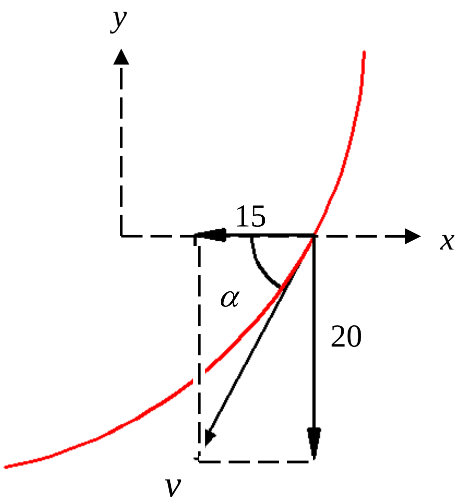
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -4$$

Investigamos en qué instante $y = 0$

$$0 = 50 - 2t^2$$

$$t = \pm 5$$

La raíz negativa no tiene significado físico en este caso.



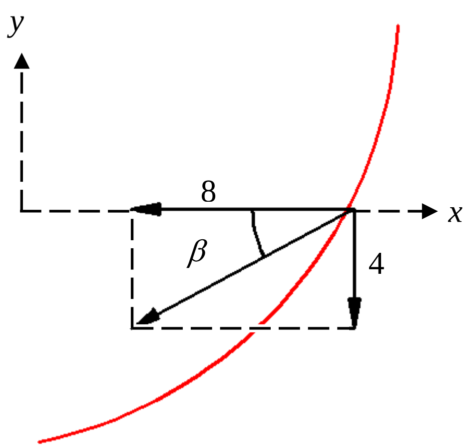
Para $t = 5$

$$v_x = 25 - 8(5) = -15$$
$$v_y = -4(5) = -20$$
$$v = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2} = \sqrt{625} = 25$$

El ángulo α que la velocidad forma con la horizontal es:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-20}{-15}$$

$$\boxed{\alpha = 53.1^\circ}$$

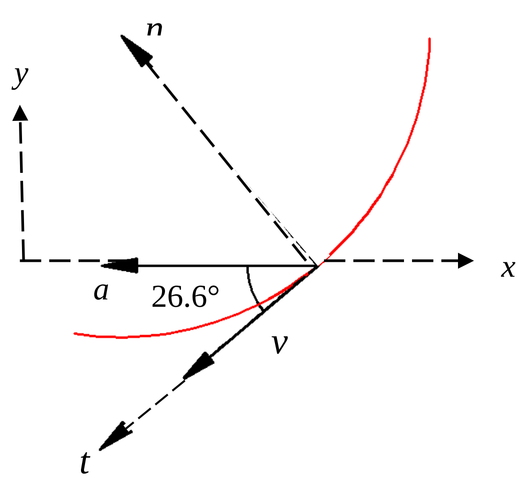


La aceleración en ese mismo instante es:

$$a_x = -8$$
$$a_y = -4$$
$$a = \sqrt{(-8)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4^2\left[(-2)^2 + (-1)^2\right]} = 4\sqrt{5}$$

Y su dirección β respecto a la horizontal

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-4}{-8}; \quad \beta = 26.6^\circ$$

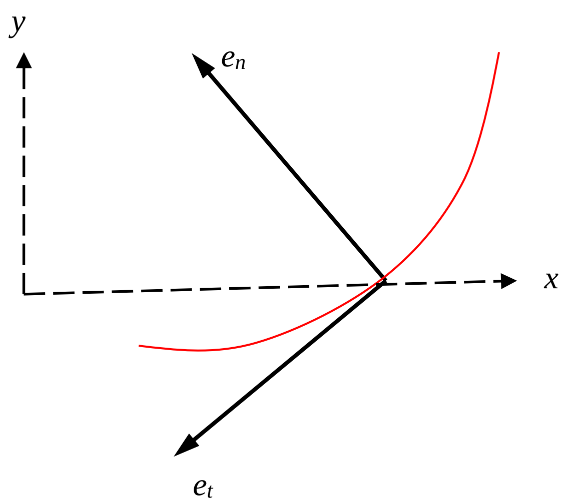


El ángulo que forman entre sí la velocidad y la aceleración es:

$$\alpha - \beta = 26.5^\circ$$

La proyección de la aceleración sobre el eje normal es:

$$a_n = a\cos 26.5^\circ = 4\sqrt{5}\cos 26.5^\circ = 4$$



Por tanto:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{625}{4} \qquad \boxed{\rho = 156.3 \text{ ft}}$$

Segundo método

Utilizando álgebra vectorial

La componente normal de la aceleración se puede obtener proyectando el vector aceleración sobre un vector unitario e_n en dirección del eje normal, el cual es perpendicular a la velocidad.

Sea e_t un vector unitario en dirección de la velocidad

$$e_t = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{1}{25}(-15i - 20j) = -0.6i - 0.8j$$

$$e_n = -0.8i + 0.6j$$

$$a_n = \bar{a} \cdot e_n = (-8i - 4j) \cdot (-0.8i + 0.6j) = 6.4 - 2.4 = 4$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{625}{4} \boxed{\rho = 156.3 \text{ ft}}$$