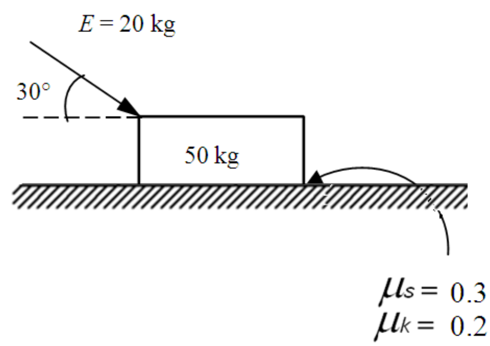
3. TRABAJO Y ENERGÍA E IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA LA PARTÍCULA

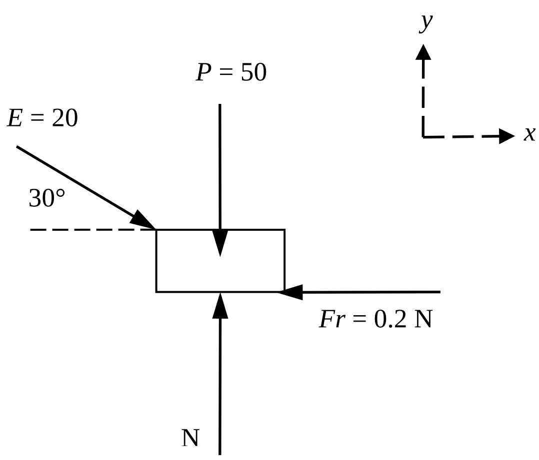
3.1 Trabajo y energía cinética

1. Con una fuerza E de 20 kg, inclinada 30º, se empuja un cuerpo de 50 kg sobre una superficie horizontal, en línea recta, a lo largo de 10 m. Los coeficientes de fricción estática y cinética son 0.3 y 0.2, respectivamente. Calcule el trabajo que realizan la fuerza E, el peso, la componente normal de la reacción de la superficie y la fricción durante el movimiento descrito.



Resolución

Mediante el diagrama de cuerpo libre investigaremos las magnitudes de las fuerzas cuyos trabajos deseamos conocer.



$$\sum Fy = 0$$

$$N - 50 - 20\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad N = 60$$

Por tanto $Fr = 0.2N = 12$

Como las cuatro fuerzas son constantes, el trabajo se puede calcular mediante la expresión:

$$U = (F\cos\theta)\ \Delta s$$

en donde θ es el ángulo que la fuerza forma con el desplazamiento, que, en este caso, es horizontal y hacia la derecha.

$$U_E = (20\cos 30°)10 = 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10$$

$$\boxed{U_E = 173.2 \ \text{kg} \cdot \text{m}}$$

$$U_P = (50\cos 270°)10$$

$$\boxed{U_P = 0}$$

$$U_N = (50\cos 90°)10$$

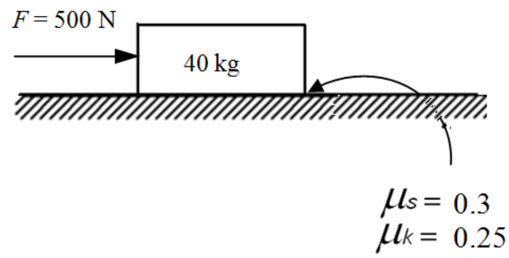
$$\boxed{U_N = 0}$$

$$U_{Fr} = (12\cos 180°)10 = 12(-1)10$$

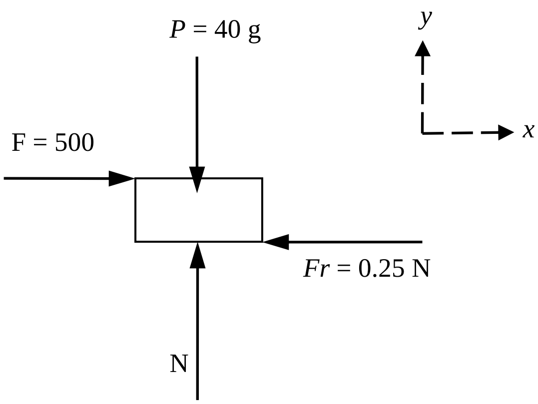
$$\boxed{U_{Fr} = -120 \ \text{kg} \cdot \text{m}}$$

El trabajo es un escalar que puede ser positivo, negativo o nulo.

2. Una fuerza *F* de 500 N empuja un cuerpo de 40 kg de masa que reposa en una superficie horizontal. Sabiendo que el cuerpo se desplaza en línea recta y que los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cuerpo y la superficie son 0.30 y 0.25, respectivamente, calcule la velocidad del cuerpo cuando se haya desplazado 8 m.



Resolución



Investigaremos las magnitudes de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo de 40 kg.

$$\sum Fy = 0$$

$$N - 40g = 0; \quad N = 40(9.81)$$

Por tanto:

$$Fr = \mu k \ N = 0.25(40)9.81$$
$$Fr = 98.1$$

Los trabajos que realizan las fuerzas son:

$$U_P = U_N = 0$$

(pues son perpendiculares al desplazamiento)

$$U_F = 500(8) = 4000$$
$$U_{Fr} = -98.1(8) = -784.8$$

La fórmula del trabajo y la energía cinética establece que:

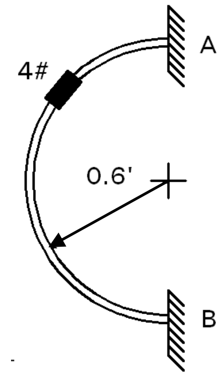
$$U = \Delta T$$

$$4000 - 784.8 = \frac{1}{2} m\left(v_2{}^2 - v_1{}^2\right)$$

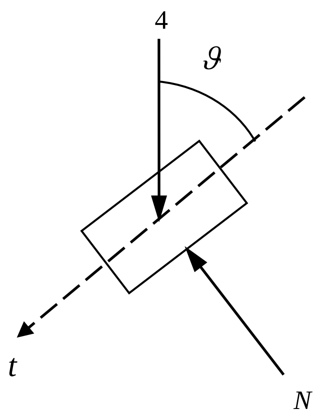
$$3215 = \frac{1}{2}(40)\left(v^2 - 0\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{3215}{20}} \quad \boxed{v = 12.68 \ \mathrm{m/s} \ \rightarrow}$$

3. El collarín de la figura, de 4 lb de peso, se suelta desde el punto *A* de la guía lisa de la figura y llega al punto *B*. Determine el trabajo que realiza su peso durante ese movimiento y diga con qué rapidez llega el collarín a *B*.



Resolución



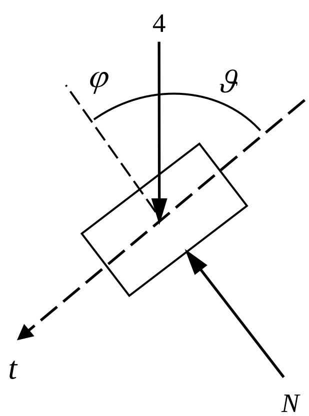
Primer procedimiento

Dibujaremos el diagrama de cuerpo libre del collarín en una posición cualquiera de su trayectoria.

El desplazamiento tiene la dirección del eje tangencial.

$$U = \int_1^2 P\cos\vartheta\ ds$$

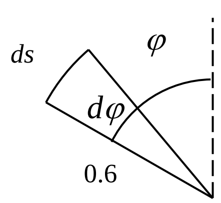
$$U = 4\int_A^B \cos\vartheta\ ds$$



Como el ángulo ϑ, durante el movimiento, va de -90° ≤ θ ≤ 90°, integraremos sustituyéndolo por el ángulo φ, que es el complemento de ϑ y siempre crece.

$$U = 4\int_{0°}^{180°} \operatorname{sen}\varphi\ ds$$

Tomaremos un desplazamiento diferencial y lo relacionaremos con φ.



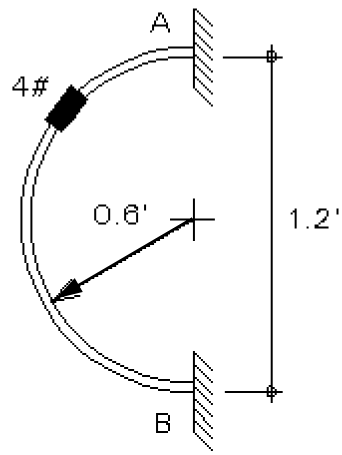
$$d\varphi = \frac{ds}{0.6};\quad ds = 0.6\ d\varphi$$

$$U = 4(0.6)\int_{0°}^{180°} \operatorname{sen}\varphi\ d\varphi$$

$$U = 2.4(-\cos 180° + \cos 0°)$$

$$U = 2.4[-(-1)+1]$$

$$\boxed{U = 4.8\ \ \text{lb}\cdot\text{ft}}$$



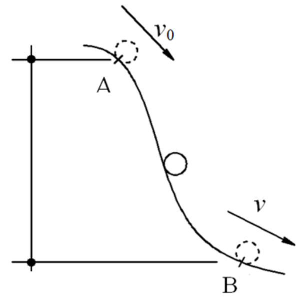
Segundo procedimiento

Como el trabajo es una fuerza conservativa, es decir, el trabajo que realiza es independiente de la trayectoria que siga el cuerpo, se puede calcular multiplicando su magnitud por el cambio de nivel de la partícula (*vid*. Prob. 4)

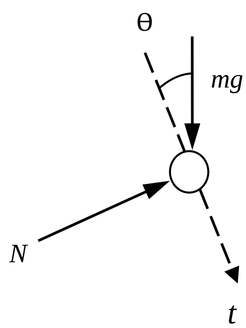
$$U = P(\Delta h)$$
$$U = 4(1.2)$$

$$\boxed{U = 4.8 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}}$$

4. Una partícula de masa *m* pasa por A con una rapidez v_o. Sabiendo que la superficie es lisa, determine, en función de la altura *h*, el trabajo del peso y la rapidez *v* con que pasa por el punto *B*.



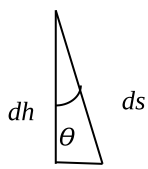
Resolución



En cualquier posición, las únicas fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso y una reacción normal. Esta última no trabaja precisamente por ser normal al desplazamiento. ϑ es el ángulo que el peso forma con el desplazamiento.

$$U = \int_A^B mg\cos\vartheta\ ds = mg\int_A^B \cos\vartheta\ ds$$

En la figura relacionaremos ϑ con un desplazamiento diferencial.



$$\cos\vartheta = \frac{dh}{ds}$$

$$U = mg\int_A^B \left(\frac{dh}{ds}\right) ds = mg\int_A^B dh$$

$$\boxed{U = mgh}$$

Utilizando la fórmula del trabajo y la energía cinética tenemos, tenemos:

$$U = \Delta T$$

$$mgh = \frac{1}{2}m\left(v^2 - {v_0}^2\right)$$

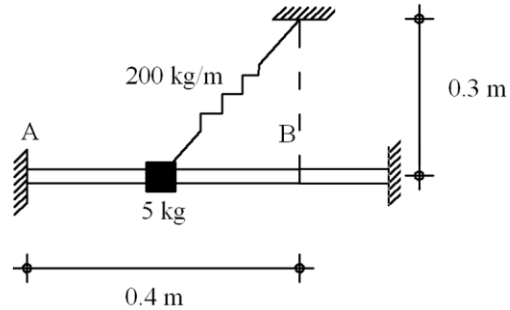
$$v^2 = {v_0}^2 + 2gh$$

$$\boxed{v = \sqrt{{v_0}^2 + 2gh}}$$

Si $v_0 = 0$, entonces:

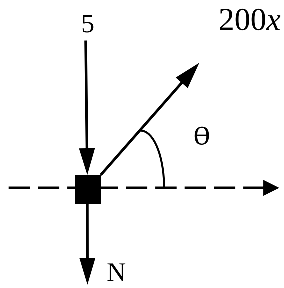
$$v = \sqrt{2gh}$$

5. El collarín de 5 kg de peso, se encuentra originalmente en reposo en el punto *A*. El resorte al que está unido tiene una longitud natural de 0.2 m y una constante de rigidez *k* = 200 kg/m. Calcule el trabajo que realiza la tensión del resorte para llevar al collarín desde *A* hasta *B*, y la rapidez con que el collarín llega a este punto.



Resolución

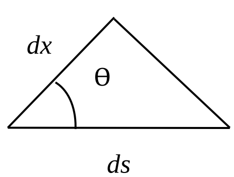
Primer procedimiento



En la figura se muestra el diagrama de cuerpo libre del collarín en una posición cualquiera. x es la deformación del resorte y es variable, como es variable la dirección ϑ.

El trabajo de la tensión del resorte es:

$$U = \int_A^B (200x)\cos\vartheta \; ds = 200\int_A^B x\cos\vartheta \; ds$$



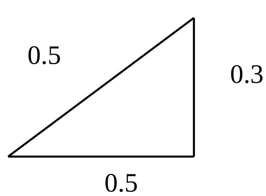
En la figura se establece la relación entre dx, ds y ϑ.

$$\cos\vartheta = \frac{dx}{ds}$$

por tanto

$$U = 200\int_1^2 xdx$$

Como las longitudes inicial y final del resorte son 0.5 y 0.3 m, y su longitud natural es 0.2 m, las deformaciones son $x_1 = 0.3$ m y $x_2 = 0.1$ m.



$$U = 200\int_{0.1}^{0.3} xdx = 200\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0.1}^{0.3}$$

$$U = 100\left(0.3^2 - 0.1^2\right) = 100(0.08)$$

$$\boxed{U = 8 \ \ \mathrm{kg \cdot m}}$$

Como la tensión del resorte es la única fuerza que trabaja, empleando la fórmula del trabajo y la energía cinética se tiene:

$$U = \Delta T$$

$$U = \frac{1}{2} m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right)$$

$$8 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9.81}\right)\left(v_B{}^2 - 0\right)$$

$$v_B = \sqrt{\frac{16(9.81)}{5}}$$

$$\boxed{v_B = 5.60 \ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}}$$

<u>Segundo procedimiento</u>

Si sabemos que el trabajo que realiza un resorte es:

$$U = -\frac{1}{2} k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)$$

entonces

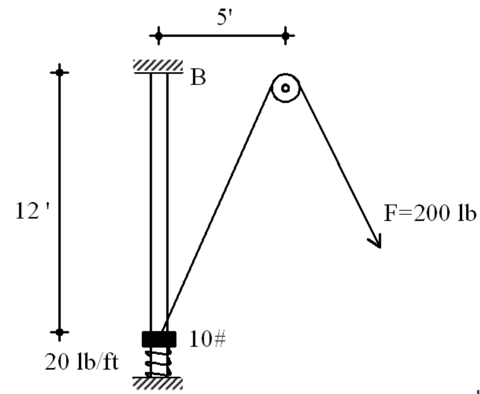
$$-\frac{1}{2} k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right) = \frac{1}{2} m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right)$$

$$-200\left(0.1^2 - 0.3^2\right) = \frac{5}{9.81} v_B{}^2$$

$$8 = \frac{5}{9.81} v_B{}^2$$

$$\boxed{v_B = 5.60 \ {}^{\text{m}}\!/_{\text{s}}}$$

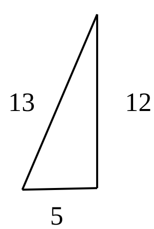
6. El collarín de la figura tiene un peso de 10 lb y reposa sobre el resorte al que está unido. La constante de rigidez del resorte es k = 20 lb/ft. La clavija por la que pasa la cuerda es lisa. A dicha cuerda se le aplica una fuerza constante de 200 lb para levantar a collarín a la posición B de la barra lisa. Determine la rapidez con que el collarín llega a B.



Resolución

Considerando el conjunto de los cuerpos como un sistema, las fuerzas externas que trabajan son la fuerza F, el peso del collarín y la fuerza del resorte. Calcularemos el trabajo que realiza cada una de ellas.

<u>Fuerza constante F de 200 lb</u>



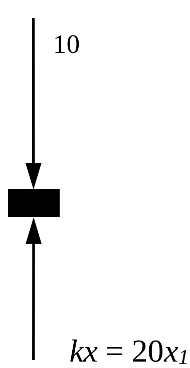
El tramo de cuerda que se halla originalmente entre la polea y el collarín mide 13 ft. Al final, el tramo se reduce a 5 ft. Por tanto, el desplazamiento de la fuerza es de 8 ft.

$$U_F = F(\Delta s) = 200(8) = 1600 \quad \text{lb} \cdot ft$$

<u>Peso del collarín</u>

Como el desplazamiento del collarín tiene el sentido contrario del peso, el trabajo que realiza es negativo.

$$U_P = -P(\Delta h) = -10(12) = -120 \quad \text{lb} \cdot \text{ft}$$



<u>Fuerza del resorte</u>

Como el collarín reposa inicialmente sobre el resorte, lo deforma una longitud tal que $20x_1 = 10$; o sea $x_1 = 0.5 \;\; ft$. Al final, el resorte estará estirado una longitud $x_2 = 12 - 0.5 = 11.5$ ft.

$$U_K = -\frac{1}{2}k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right) = -\frac{1}{2}(20)\left(11.5^2 - 0.5^2\right)$$

$$U_K = -1320 \quad \text{lb}\cdot\text{ft}$$

Empleando la fórmula del trabajo y la energía cinética:

$$U = \Delta T$$

$$1600 - 120 - 1320 = \frac{1}{2}m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right)$$

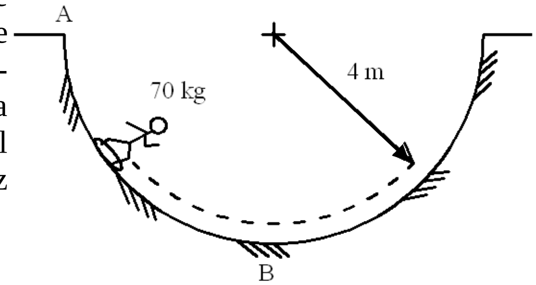
$$160 = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{32.2}\right)\left(v_B{}^2 - 0\right)$$

$$v_B{}^2 = \frac{320(32.2)}{10}$$

$$\boxed{v_B = 32.1 \quad \text{ft}/\text{s}}$$

3.2 Trabajo, energía cinética y energía potencial

7. Un competidor de *snowboard* de 70 kg de peso, se deja caer desde el punto *A* de la superficie semicilíndrica que se muestra en la figura. Despreciando el tamaño del competidor y toda fricción, diga cuál es la energía potencial gravitacional que pierde el competidor al llegar al fondo *B* y con qué rapidez llega a esa posición.

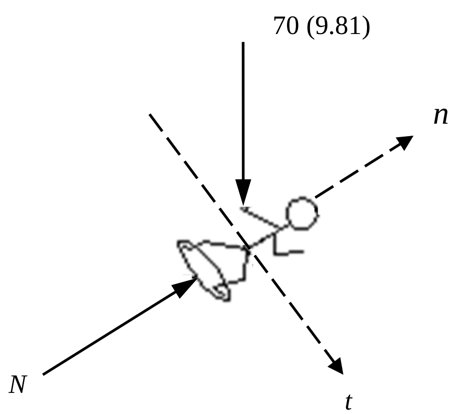


Resolución

El competidor pierde energía potencial gravitacional, puesto que el punto B está más bajo que A.

$$\Delta Vg = P(\Delta h)$$
$$\Delta Vg = 70(9.81)(-4) = -2747$$

$$\boxed{\Delta Vg = -2750 \quad \mathrm{N \cdot m}}$$



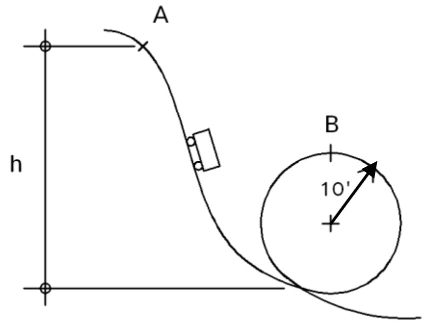
Las únicas fuerzas que actúan durante el movimiento son el peso y la reacción normal.

Se produce un intercambio entre la energía cinética y la potencial gravitacional.

$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$
$$\frac{1}{2} m\left(v_B{}^2 - v_A{}^2\right) + P(\Delta h) = 0$$
$$\frac{1}{2}(70)\left(v_B{}^2 - 0\right) - 2747 = 0$$
$$v_B{}^2 = \frac{2747(2)}{70}$$

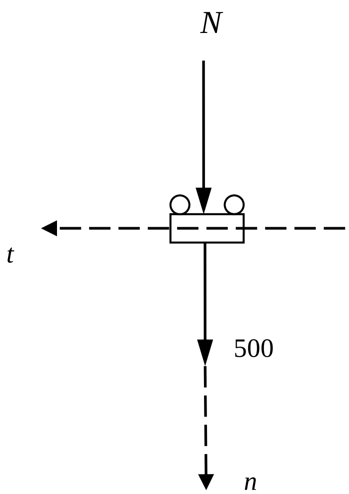
$$\boxed{v_B = 8.86 \quad \mathrm{m/s}}$$

8. El carrito de 500 lb de un juego de feria pasa por el punto *A* con una rapidez de 20 ft/s. Sabiendo que la altura *h* es de 30 ft y el radio del bucle es de 10ft, calcule la rapidez con que el carrito pasa por la cima *B* del bucle circular de la vía, y la fuerza que ésta ejerce sobre aquél en dicha posición. Calcule también cuál debe ser la mínima altura *h* a la que debe soltarse para que el carrito alcance la mencionada cima.



Resolución

Utilizaremos la fórmula de la conservación de la energía para calcular la rapidez con que el carrito pasa por B.



$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$

$$\frac{1}{2} m\left(v_2{}^2 - v_1{}^2\right) + P(\Delta h) = 0$$

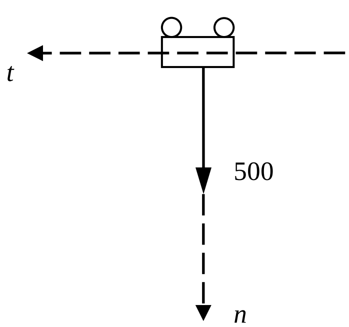
observamos que Δh es negativa y de 30-2(10) = 10

$$\frac{1}{2}\left(\frac{500}{32.2}\right)\left(v_2{}^2 - 20^2\right) + 500(-10) = 0$$

$$v_2{}^2 - 400 = 644$$

$$v_2{}^2 = 1044$$

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del carrito al pasar por B y elegimos un sistema de referencia intrínseco.



$$\sum F_n = ma_n$$

$$500 + N = \frac{500}{32.2}\frac{v^2}{\rho}$$

$$N = -500 + \frac{500}{32.2}\left(\frac{1044}{10}\right)$$

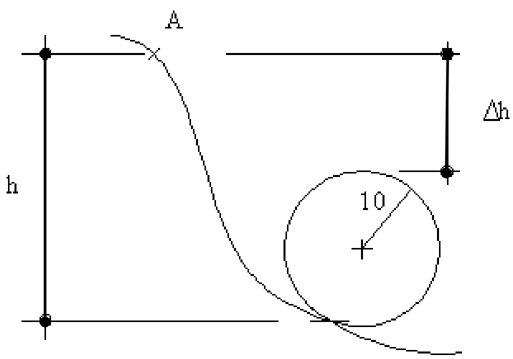
$$\boxed{N = 1121 \text{ lb} \downarrow}$$

Para calcular la altura *h* mínima de la que debe soltarse el carrito para que recorra el bucle completo, dibujaremos el diagrama de cuerpo libre y calcularemos la rapidez con que debe pasar por B.

$$\sum F_n = ma_n$$

$$500 = \frac{500}{32.2}\ \frac{v^2}{10}$$

$$v^2 = 322$$



Con la fórmula de la conservación de la energía, tomando en cuenta que $h = 20 + \Delta h$

$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$

$$\frac{1}{2}m\left(v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2}\right) + P(\Delta h) = 0$$

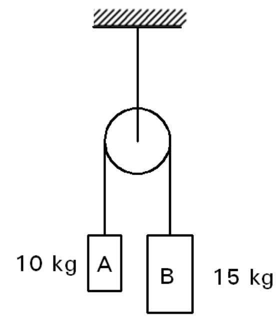
$$\frac{1}{2}\left(\frac{500}{32.2}\right)(322 - 0) + 500(-\Delta h) = 0$$

$$5 - (h - 20) = 0$$

$$h - 20 = 5$$

$$\boxed{h = 25 \ \text{ft}}$$

9. Los cuerpos de la figura están inicialmente en reposo. Las masas de *A* y *B* son 10 y 15 kg, respectivamente, mientras que la de la polea es despreciable. Calcule la rapidez de los cuerpos cuando se hayan desplazado 0.5 m y la tensión de la cuerda.



Resolución

Entre la posición inicial y la final hay cambio tanto de la energía cinética como de la energía potencial del sistema, en el cual se incluyen los dos cuerpos, la polea y la cuerda. Las rapideces de *A* y *B* son iguales.

$$\Delta T + \Delta Vg = 0$$

$$\Delta T_A = \frac{1}{2} m_A \left(v^2 - 0\right) = \frac{1}{2}(10)v^2 = 5v^2$$

$$\Delta T_B = \frac{1}{2} m_B \left(v^2 - 0\right) = \frac{1}{2}(15)v^2 = 7.5v^2$$

$$\Delta Vg_A = mg(\Delta h) = 10(9.81)0.5 = 49.05$$

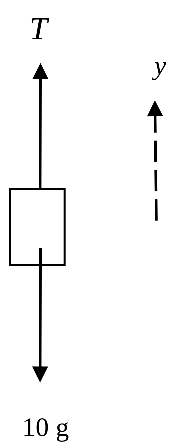
$$\Delta Vg_B = -mg(\Delta h) = -15(9.81)0.5 = -73.58$$

$$5v^2 + 7.5v^2 + 49.05 - 73.58 = 0$$

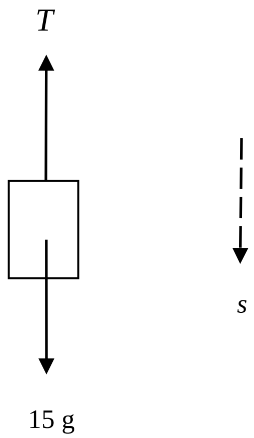
$$12.5v^2 = 24.53$$

$$v = \sqrt{\frac{24.53}{12.5}}$$

$$\boxed{v = 1.401 \ \mathrm{m/s}}$$



Para determinar la tensión de la cuerda, podemos aislar cualquiera de los cuerpos. Elegimos el cuerpo *A*. dibujamos su diagrama de cuerpo libre.



$$U = \Delta T + \Delta Vg$$

$$T(\Delta s) = \frac{1}{2}m(v^2 - 0) + mg(\Delta h)$$

$$T(0.5) = \frac{1}{2}(10)1.401^2 + 10(9.81)0.5$$

$$T = 10(1.401^2) + 98.1$$

$$\boxed{T = 117.7 \text{ N}}$$

Podemos comprobar llevando los resultados al cuerpo *B*.

$$U = \Delta T + \Delta Vg$$

$$T(\Delta s) = \frac{1}{2}m(v^2 - 0) + mg(\Delta h)$$

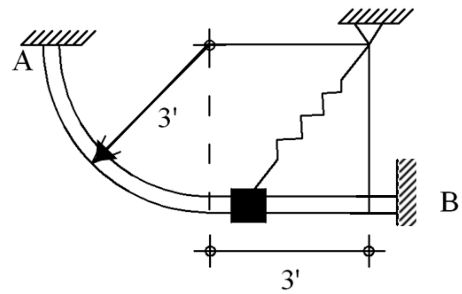
$$-117.7(0.5) = \frac{1}{2}(15)(1.401^2) - 15(9.81)0.5$$

$$-58.86 = 14.72 - 73.58$$

$$-58.86 = -58.86$$

Lo cual confirma que el resultado es correcto.

10. La guía lisa de la figura está contenida en un plano vertical. El collarín de 12 lb está originalmente en reposo en *A* y se mueve a *B*. El resorte tiene una longitud natural de 2 ft y una constante de rigidez k = 50 lb/ft. Calcule el cambio de energía potencial elástica que sufre el resorte y la rapidez con que el collarín llega al punto *B*.



Resolución

Para calcular el cambio de energía potencial del resorte, necesitamos conocer sus deformaciones inicial y final.

$$x_1 = 6 - 2 = 4$$
$$x_2 = 3 - 2 = 1$$

Por tanto:

$$\Delta Ve = \frac{1}{2}k\left(x_2{}^2 - x_1{}^2\right)$$
$$\Delta Ve = \frac{1}{2}(50)\left(1^2 - 4^2\right) = 25(-15)$$

$$\boxed{\Delta Ve = -375 \text{ lb} \cdot \text{ft}}$$

El signo negativo indica que hubo una pérdida de energía potencial elástica entre la primera posición y la segunda.

Para investigar la rapidez con que el collarín llega a B, emplearemos la fórmula de la conservación de la energía, pues ninguna fuerza no conservativa actúa en el sistema.

$$\Delta T + \Delta Vg + \Delta Ve = 0$$
$$\frac{1}{2}m\left(v^2 - 0\right) + P(\Delta h) + (-375) = 0$$

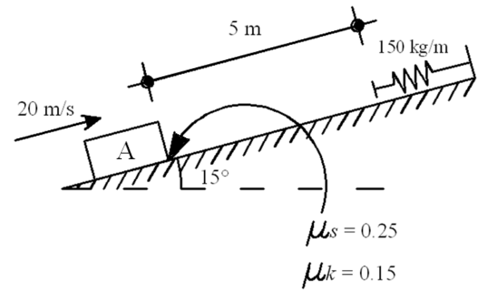
$$\frac{1}{2}\left(\frac{12}{32.2}\right)v^2 + 12(-3) - 375 = 0\}$$

$$\frac{3}{16.1}v^2 = 375 + 36$$

$$v^2 = \frac{411(16.1)}{3}$$

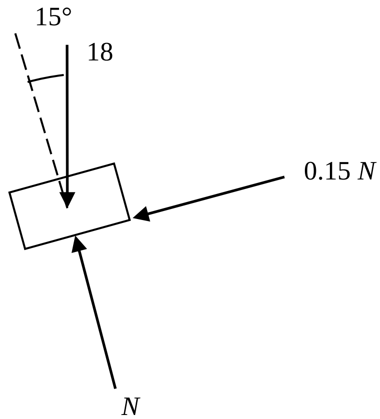
$$\boxed{v = 47.0 \ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{s}}}$$

11. El cuerpo A de 18 kg de peso se lanza hacia arriba del plano inclinado 15º con una rapidez inicial de 20 m/s. Los coeficientes de fricción estática y ciné-tica entre el cuerpo y el plano son, respec-tivamente, 0.25 y 0.15, Determine la deformación máxima que sufrirá el resorte por la acción del cuerpo, sabiendo que su constante de rigidez es de 1500 kg/m.



Resolución

Para la resolución del problema, que exige rela-cionar posiciones y rapideces, se puede emplear la fórmula del trabajo y la energía.



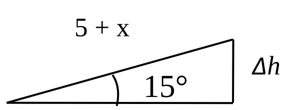
En el sistema que se deforma por el cuerpo A, el resorte y el plano, durante el movimiento del primero, la única fuerza no conservativa que actúa es la de fricción. La magnitud de ésta la calcularemos me-diante el diagrama de cuerpo libre de A.

$$\sum Fy = 0$$
$$N - 18\cos 15° = 0$$
$$N = 17.39$$

Por tanto, la fuerza de fricción es

$$Fr = 0.15N = 2.608$$

Empleando la fórmula del trabajo y la energía y teniendo en cuenta que el cuerpo A se detiene cuando el resorte alcanza su máxima deformación x_1, tene-mos:



$$U = \Delta T + \Delta Vg + \Delta Ve$$
$$U = -Fr(\Delta s) = -2.608(5 + x) = -13.04 - 2.608x$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\left(v_2^{\;2} - v_1^{\;2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{9.81}\right)\left(0 - 20^2\right) = -367$$

$$\Delta Vg = P(\Delta h) = 18\left[(5 + x)\text{sen}15°\right] = 4.66x + 23.3$$

$$\Delta Ve = \frac{1}{2}h\left(x_2^{\;2} - x_1^{\;2}\right) = \frac{1}{2}(1500)\left(x^2 - 0\right) = 750x^2$$

Sustituyendo

$$-13.04 - 2.608x = -367 + 4.66x + 23.3 + 750x^2$$

$$750x^2 + 7.27x - 330.7 = 0$$

$$x_1 = 0.659$$

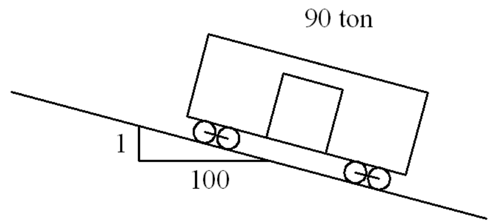
$$x_2 = -0.669$$

La raíz negativa no tiene significado físico y la máxima deformación del resorte es:

$$\boxed{x = 0.659 \text{ m}}$$

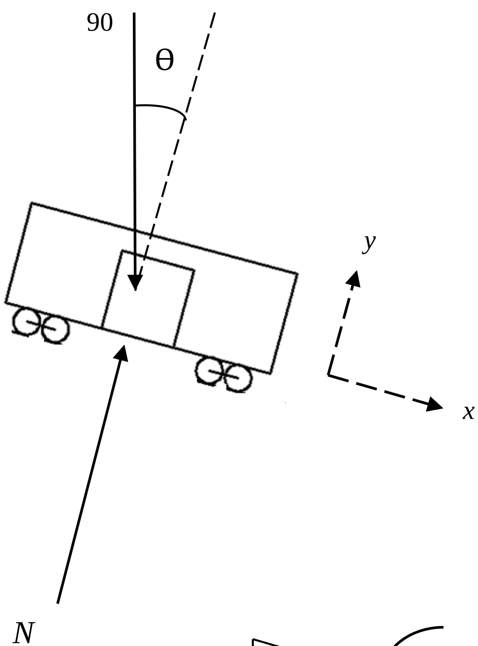
3.3 Impulso y cantidad de movimiento

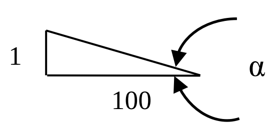
12. Un carro de ferrocarril de 90 ton queda sin frenos sobre una vía recta cuya pendiente es del 1%. Si en cierto instante desciende a razón de 0.5 m/s, ¿cuál es su cantidad de movimiento? ¿Cuál será su velocidad cuatro segundos después?



Resolución

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del carro, para conocer las fuerzas que actúan sobre él y elegimos un eje de referencia en la dirección de la velocidad.





$\alpha = 0.573°$

Cuando su velocidad es de $0.5 \ \mathrm{m/s}$ la cantidad de movimiento del carro es:

$$\overline{L} = m\overline{v}$$

$$L = 90(0.5)$$

$$\boxed{L = 45 \ \frac{\mathrm{ton \cdot m}}{\mathrm{s}} \ \searrow 0.573°}$$

Podemos calcular su velocidad cuatro segundos después mediante la fórmula del impulso y la cantidad de movimiento.

$$\int_1^2 \sum \overline{F} dt = \overline{L_2} - \overline{L_1}$$

$$\int_1^2 \sum F_x dt = L_{2x} - L_{1x}$$

Como las fuerzas son constantes:

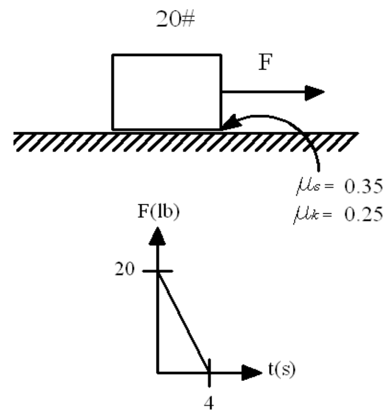
$$\sum F_x (\Delta t) = m v_4 - 45$$

$$\frac{90}{9.81}\left(\frac{1}{100}\right)4 = 90 v_4 - 45$$

$$0.00408 = v_4 - 0.5$$

$$\boxed{v_4 = 0.504 \ \mathrm{m/s} \ \searrow \ 0.573°}$$

13. Un cuerpo de 20 lb reposa sobre una superficie horizontal, cuando se le aplica una fuerza *F* cuya magnitud varía conforme se muestra en la gráfica. Cuando t = 4s, ¿Cuál es la velocidad máxima que adquiere el cuerpo? ¿Cuánto tiempo después de que termino la aplicación de la fuerza se detendrá? Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el cuerpo y la superficie son 0.35 y 0.25, respectivamente.



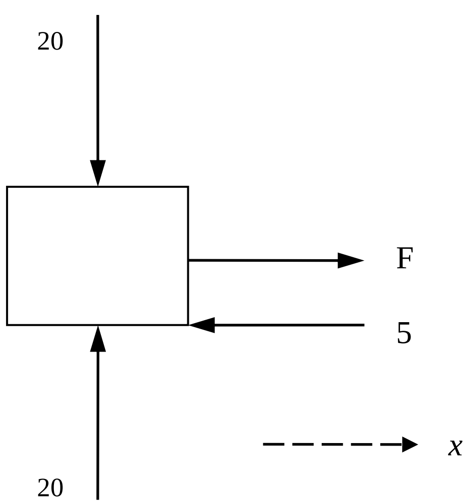
Resolución

Dado que la fuerza está en función del tiempo, emplearemos el método del impulso y cantidad de movimiento.

De la gráfica, cuya ordenada al origen es 20 y su pendiente negativa de $20/4 = 5$, obtenemos:

$$F = 20 - 5t$$

Calcularemos la velocidad del cuerpo cuando $t = 4$



$$\int_0^4 \sum F_x dt = L_{2x} - L_{1x}$$

$$\int_0^4 (F - 5)\, dt = L_{2x} - 0$$

$$\int_0^4 (15 - 5t)\, dt = \frac{20}{32.2} v_4$$

$$15t - 2.5t^2 \Big|_0^4 = \frac{20}{32.2} v_4$$

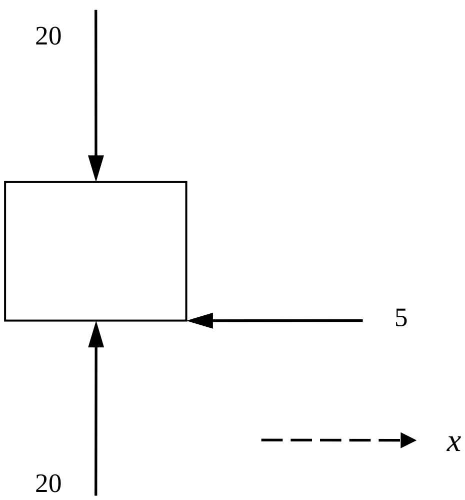
$$60 - 40 = \frac{20}{32.2} v_4$$

$$v_4 = \frac{20(32.2)}{20}$$

$$\boxed{v_4 = 32.2 \ \text{ft/s} \rightarrow}$$

La rapidez máxima la alcanzará el cuerpo cuando la resultante del sistema de fuerzas sea nula.

$$\sum F_x = 0$$
$$20 - 5t - 5 = 0$$
$$5t = 15$$
$$t = 3$$



Por tanto

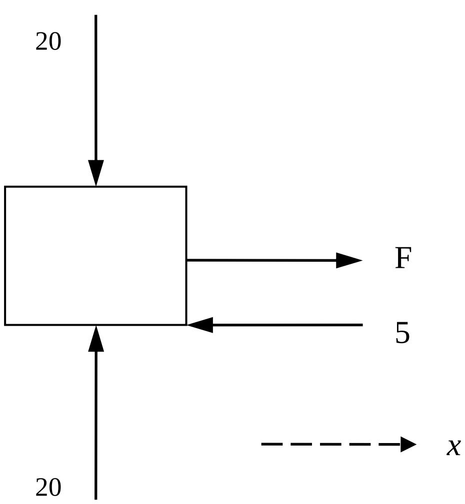
$$\int_0^3 (15 - 5t)\ dt = \frac{20}{32.2} v_{\max}$$
$$45 - 22.5 = \frac{20}{32.2} v_{\max}$$
$$v_{\max} = \frac{22.5(32.2)}{20}$$

$$\boxed{v_{\max} = 36.2\ \text{ft}/\text{s} \rightarrow}$$

Después de $t = 4$, el cuerpo queda sujeto a las fuerzas mostradas.

$$\int \sum F_x dt = 0 - L_{4x}$$
$$-5(\Delta t) = -20$$

$$\boxed{\Delta t = 4\ \text{s}}$$



<u>Otro procedimiento</u>

Puesto que la fórmula del impulso es:

$$L_x = \int \sum F_x dt$$

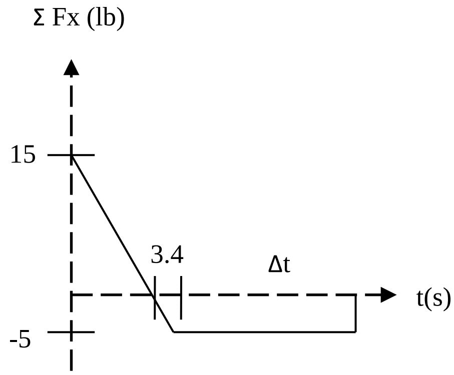
Dicha cantidad queda representada por el área contenida bajo la gráfica de la componente horizontal de la resultante del sistema de fuerzas, la cual es:

$$\sum F_x = F - 5 = 20 - 5t - 5$$
$$\sum F_x = 15 - 5t$$

Cuya gráfica se muestra en la figura

El área positiva máxima que se acumula, a los $3.6\ \mathrm{s}$ es:

$$A = \frac{1}{2}(15)3.2 = 22.5$$



que igualada con el incremento de la cantidad de movimiento nos permite hallar la velocidad máxima

$$22.5 = m(v_{max} - 0)$$

$$22.5 = \frac{20}{32.2} v_{max}$$

$$v_{max} = \frac{22.5(32.2)}{20}$$

$$\boxed{v_{max} = 36.2\ \mathrm{ft}/\mathrm{s} \rightarrow}$$

Para encontrar la velocidad cuando $t = 4\ \mathrm{s}$, al área anterior hay que restarle la del pequeño triángulo que le sigue.

$$22.5 - \frac{1}{2}(1)5 = \frac{20}{32.2} v_4$$

$$20 = \frac{20}{32.2} v_4$$

$$v_4 = \frac{20(32.2)}{20}$$

$$\boxed{v_4 = 32.2\ \mathrm{ft}/\mathrm{s} \rightarrow}$$

Para calcular el tiempo Δt, en que el cuerpo se seguirá moviendo, igualamos el área positiva con la negativa.

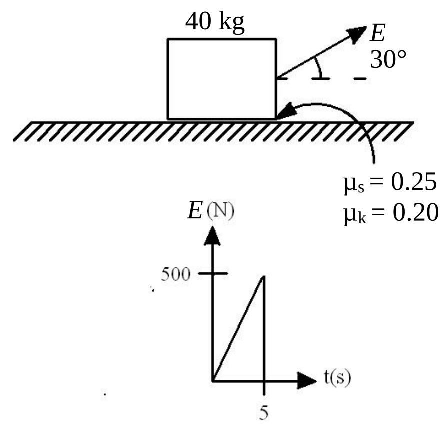
$$\frac{1}{2}(15)3 = \frac{1}{2}(1)5 + 5(\Delta t)$$

$$22.5 = 2.5 + 5(\Delta t)$$

$$\Delta t = \frac{20}{2}$$

$$\boxed{\Delta t = 4\ \mathrm{s}}$$

14. El cuerpo de 40 kg de la figura está inicialmente en reposo. Se le aplica la fuerza *E* de magnitud variable, que se comporta según se muestra en la gráfica. Calcule la velocidad máxima que alcanza el cuerpo y el tiempo que se sigue moviendo, una vez que se retire la fuerza *E*. Los coeficientes de fricción estática y cinética son 0.25 y 0.20, respectivamente.



Resolución

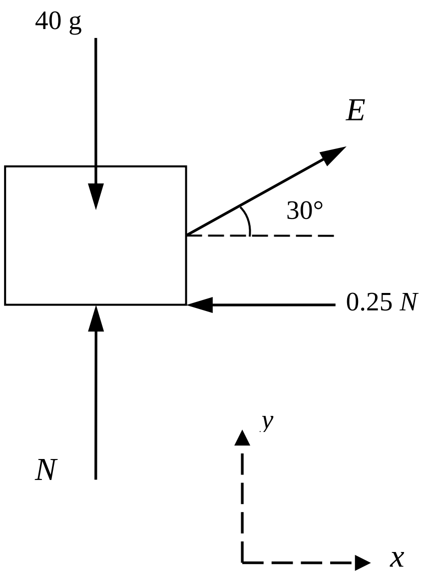
El cuerpo comenzará a moverse en el instante en que la componente horizontal de la fuerza *E* exceda la fuerza máxima de fricción estática, que es:

$$F' = \mu_s N = 0.25N$$

La magnitud de *E* se puede expresar de acuerdo a la gráfica, como:

$$E = 100t$$

Cuando el cuerpo está a punto de moverse, tenemos:



$$\sum F_y = 0$$

$$N - 40(9.81) + 0.5(100t) = 0$$

$$N = 40(9.81) - 50t$$

$$N = 392.4 - 50t \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}(100t)}{2} - 0.25(392.4 - 50t) = 0$$

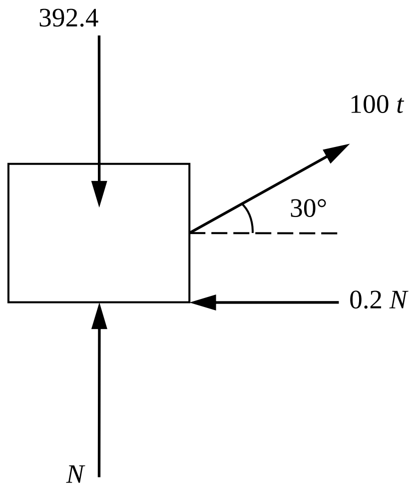
$$50\sqrt{3}t - 98.1 + 12.5t = 0$$

$$-98.1 + 99.1t = 0$$

$$t = 0.99 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad (2)$$

A partir de este instante comienza el movimiento. La fricción se convierte en cinética y su valor es:

$$F_k = \mu_k N = 0.2N$$

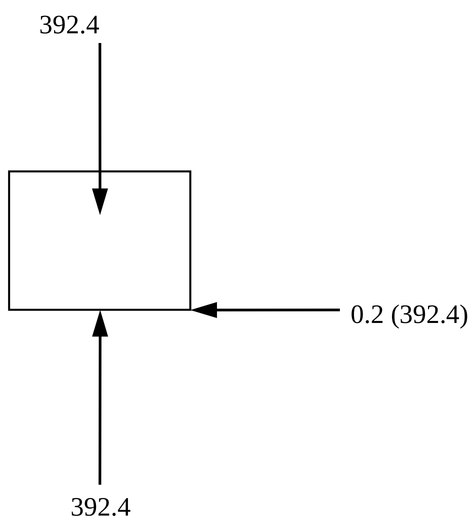


Dibujamos el diagrama de cuerpo libre y utilizamos la ecuación del impulso.

$$\sum F_y \Delta t = 0$$
$$N - 392.4 + 50t = 0$$
$$N = 392.4 - 50t$$

Como la rapidez máxima la alcanza cuando $t = 5$ s

$$\int_{0.99}^{5} \sum F_x dt = m(v_{máx} - 0)$$
$$\int_{0.99}^{5} (\frac{\sqrt{3}}{2}(100t) - 0.2(392 - 50t))dt = 40 \ v_{máx}$$
$$\int_{0.99}^{5} (50t(\sqrt{3}) - 0.2(392.4 - 50t))dt = 40 \ v_{máx}$$
$$\int_{0.99}^{5} (86.6t - 78.48 + 10t)dt = 40 \ v_{máx}$$
$$\int_{0.99}^{5} (96.6t - 78.48)dt = 40 \ v_{máx}$$
$$48.3t^2 - 78.48t \Big|_{0.99}^{5} = 40 \ v_{máx}$$
$$48.3(5^2) - 78.48(5) - 48.3(0.99^2) + 78.48(.99)$$
$$= 40 \ v_{máx}$$
$$845.5 = 40 \ v_{máx}$$
$$v_{máx} = \frac{845.5}{40}$$



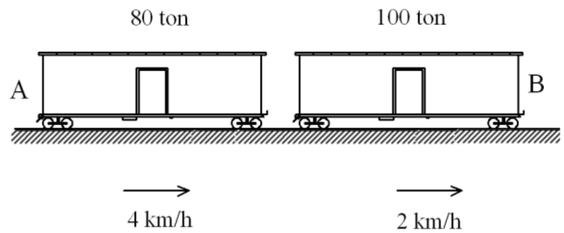
$$\boxed{v_{máx} = 21.1 \ \text{m/s} \rightarrow}$$

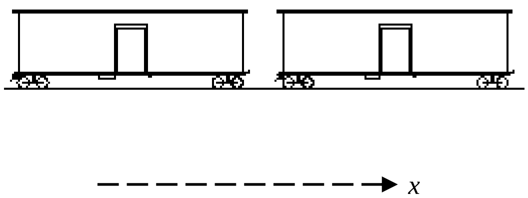
Una vez que se retira la fuerza *E*, el diagrama de cuerpo libre es el que se muestra. El impulso ulterior es:

$$\sum F_x = (\Delta t) = m(0 - v_{máx})$$
$$-0.2(392.4)(\Delta t) = 40(-21.1)$$

$$\boxed{\Delta t = 10.77 \ \text{s}}$$

15. El carro *A* es de 80 ton y viaja a 4 km/h, mientras que *B* es de 100 ton y se mueve a 2 km/h. Cuando *A* alcanza a *B* los carros quedan acoplados. ¿Con qué velocidad se mueven entonces?





Resolución

Utilizamos la fórmula de la conservación de la cantidad de movimiento lineal.

$$m_A \overline{v_{A1}} + m_B \overline{v_{B1}} = m_A \overline{v_{A2}} + m_B \overline{v_{B2}}$$

Como las velocidades tienen la misma dirección y son iguales las velocidades finales de A y B, podemos escribir:

$$m_A v_{A1} + m_B v_{B1} = m_A v + m_B v$$

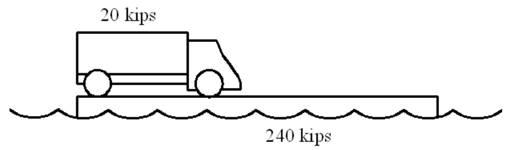
$$80(4) + 100(2) = 80v + 100v$$

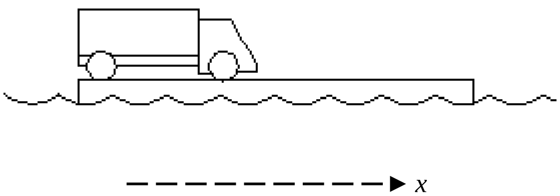
$$520 = 180v$$

$$v = \frac{520}{180}$$

$$\boxed{v = 2.89 \ \mathrm{km}/\mathrm{h} \ \rightarrow}$$

16. Un camión de 20 kips reposa sobre un transbordador de 240 kips. Debido al movimiento del transbordador el camión se empieza a mover hacia la derecha hasta alcanzar una velocidad de 10 mi/h. Determine la velocidad correspondiente del transbordador, sabiendo que la resistencia del agua a su movimiento es despreciable.





Resolución

Empleamos la fórmula de la conservación de la cantidad de movimiento.

$$m_C \overline{v_{C1}} + m_T \overline{v_{T1}} = m_C \overline{v_{C2}} + m_T \overline{v_{T2}}$$

Como las velocidades son horizontales

$$m_C v_{C1} + m_T v_{T1} = m_C v_{C2} + m_T v_{T2}$$
$$20(0) + 240(0) = 20 v_C + 240 v_T$$

Sabemos que la velocidad relativa del camión respecto al transbordador es de $10\, mi/h$.

$$v_C = v_{C/T} + v_T$$
$$v_C = 10 + v_T$$

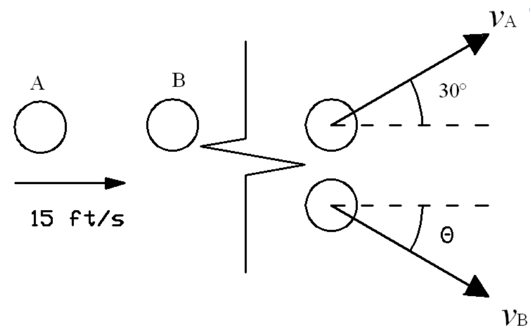
Sustituyendo

$$0 = 20(10 + v_T) + 240 v_T$$
$$0 = 200 + 20 v_T + 240 v_T$$
$$260 v_T = -200$$
$$v_T = -\frac{200}{260} = -0.769$$

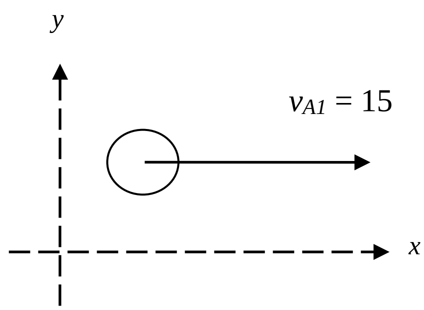
El signo indica que el transbordador se mueve hacia la izquierda.

$$\boxed{v_T = 0.769 \ \mathrm{mi/h} \ \leftarrow}$$

17. Una bola de billar A que se mueve a 15 ft/s golpea a otra, B, en reposo. Después del impacto. la bola A se desvía 30º y tiene una rapidez de 10 ft/s. Sabiendo que las bolas tienen masas iguales y son perfectamente elásticas, calcule la velocidad de B después del impacto.



Resolución

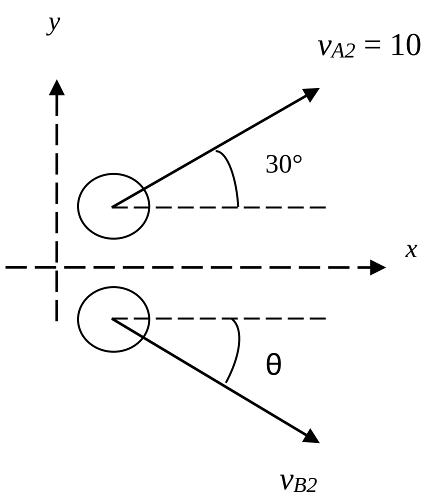


Resolveremos el problema utilizando la fórmula de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, eligiendo el sistema de referencia que se muestra en la figura.

$$m_A\overline{v_{A1}}+m_B\overline{v_{B1}}=m_A\overline{v_{A2}}+m_B\overline{v_{B2}}$$

Como las masas de A y B son iguales:

$$\overline{v_{A1}}+\overline{v_{B1}}=\overline{v_{A2}}+\overline{v_{B2}}$$



en donde:

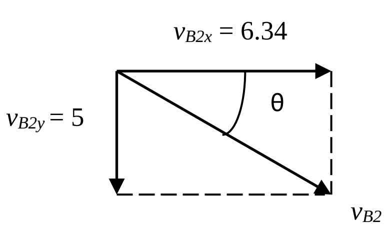
$$\overline{v_{A2}}=10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i+10\left(\frac{1}{2}\right)j$$
$$\overline{v_{B2}}=v_{B2x}i+v_{B2y}j$$

es decir:

$$15i=8.66i+5j+v_{B2x}i-v_{B2y}j$$

Igualando las componentes en *x*

$$15=8.66+v_{B2x}$$
$$v_{B2x}=6.34$$



Igualando las componentes en *y*

$$0=5-v_{B2y}$$
$$v_{B2y}=5$$

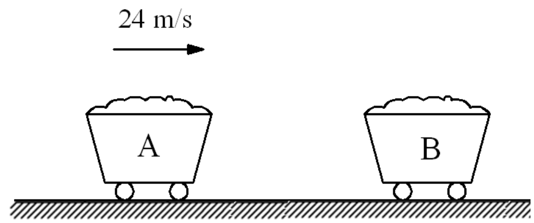
Por tanto

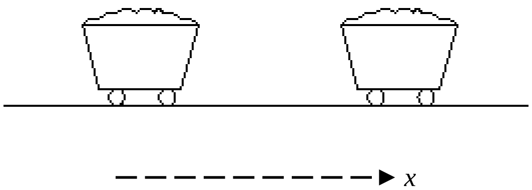
$$v_{B2} = \sqrt{{v_{B2x}}^2 + {v_{B2y}}^2} = \sqrt{6.34^2 + 5^2}$$

$$\tan\vartheta = \frac{v_{B2y}}{v_{B2x}} = \frac{5}{6.34}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_{B2} = 8.07 \ \mathrm{ft/s} \\ \vartheta = 38.3° \end{array}}$$

18. En una vía horizontal recta se encuentran dos carros de mina iguales. El carro *A*, que se mueve a 24 m/s, alcanza al carro *B*, que está en reposo. Suponiendo que se pierde el 20% de la energía cinética original a causa del impacto, calcule la velocidad de cada uno de los carros después del impacto.





Resolución

De la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento se tiene:

$$m_A \overline{v_{A1}} + m_B \overline{v_{B1}} = m_A \overline{v_{A2}} + m_B \overline{v_{B2}}$$

pero como las masas de los carros son iguales y todas las velocidades tienen la misma dirección

$$v_{A1} + v_{B1} = v_{A2} + v_{B2}$$

$$24 + 0 = v_{A2} + v_{B2}$$

$$v_{A2} + v_{B2} = 24$$

$$v_{B2} = 24 - v_{A2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

Puesto que se pierde el 20% de la energía cinética:

$$\left(\frac{1}{2}m_A v_{A1}{}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}{}^2\right)0.8 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}{}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}{}^2$$

Simplificando

$$\left(v_{A1}{}^2 + v_{B1}{}^2\right) 0.8 = v_{A2}{}^2 + v_{B2}{}^2$$

$$\left(24^2 + 0\right) 0.8 = v_{A2}{}^2 + v_{B2}{}^2$$

Sustituyendo el valor de (1)

$$\left(24^2\right) 0.8 = v_{A2}{}^2 + \left(24 - v_{A2}\right)^2$$

$$\left(24^2\right) 0.8 = v_{A2}{}^2 + 24^2 - 48v_{A2} + v_{A2}{}^2$$

$$\left(24^2\right) \left(-0.2\right) = 2v_{A2}{}^2 - 48v_{A2}$$

$$v_{A2}{}^2 - 24v_{A2} + 57.6 = 0$$

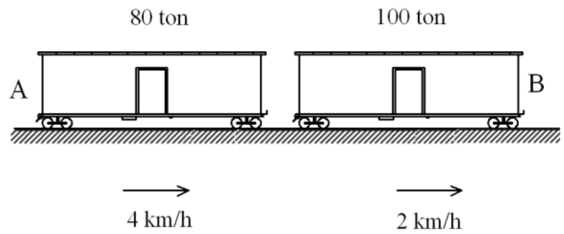
Resolviendo:

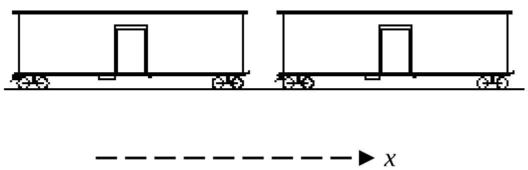
$$(v_{A2})_1 = 21.3$$
$$(v_{A2})_2 = 2.70$$

Las raíces son las velocidades de los cuerpos, pues suman 24. La mayor corresponde al carro *B*, que va delante de *A*.

$$\boxed{\begin{array}{l} v_{A2} = 2.70 \ \mathrm{m/s} \ \rightarrow \\ v_{B2} = 21.3 \ \mathrm{m/s} \ \rightarrow \end{array}}$$

19. El carro *A* es de 80 ton y viaja a 4 km/h, mientras que *B* es de 100 ton y se mueve a 2 km/h. Si el coeficiente de restitución entre los carros es 0.6, ¿cuál será la velocidad de cada uno de ellos después del impacto?





Resolución

De la conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$m_A \overline{v_{A1}} + m_B \overline{v_{B1}} = m_A \overline{v_{A2}} + m_B \overline{v_{B2}}$$

$$80(4) + 100(2) = 80\ v_{A2} + 100\ v_{B2}$$

$$80\ v_{A2} + 100\ v_{B2} = 520$$

dividiendo entre 20

$$4\ v_{A2} + 5\ v_{B2} = 26 \qquad (1)$$

Puesto que se trata de un impacto central entre cuerpos que no son perfectamente elásticos

$$(v_{A1} - v_{B1})e = v_{B2} - v_{A2}$$

$$(4-2)0.6 = v_{B2} - v_{A2}$$

$$-v_{A2} + v_{B2} = 1.2 \qquad (2)$$

multiplicando por 4 y resolviendo el sistema por suma y resta

$$\begin{array}{r} -4\ v_{A2} + 4\ v_{B2} = 4.8 \\ 4\ v_{A2} + 5\ v_{B2} = 26 \\ \hline 9\ v_{B2} = 30.8 \end{array}$$

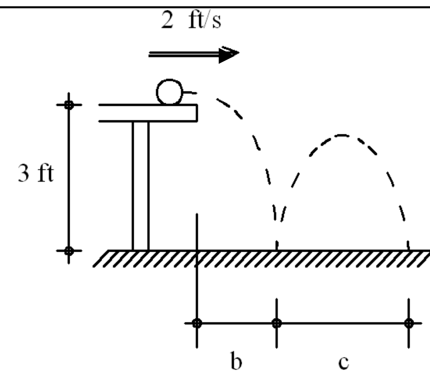
$$\boxed{v_{B2} = 3.42 \ \mathrm{km/h} \ \rightarrow}$$

De (2)

$$v_{A2} = v_{B2} - 1.2 = 3.42 - 1.2$$

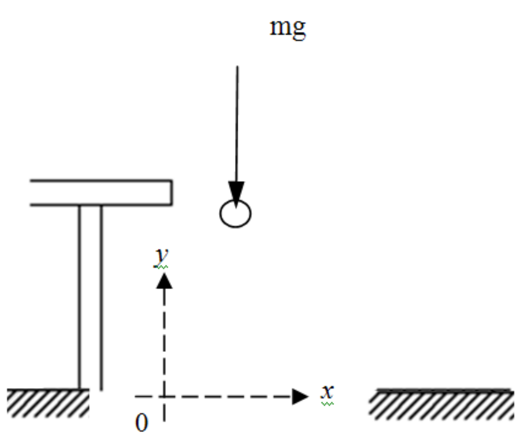
$$\boxed{v_{A2} = 2.22 \ \mathrm{km/h} \ \rightarrow}$$

20. Sobre una mesa de 3 ft de altura rueda una pelota a 2 ft/s y cae al piso. Sabiendo que el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso es 0.9, calcule la distancia *b* de la mesa al punto en que la pelota cae, y la distancia *c* en la que da el segundo rebote.



Resolución

En cuanto la pelota abandona la mesa queda sujeta a la sola acción de su peso.



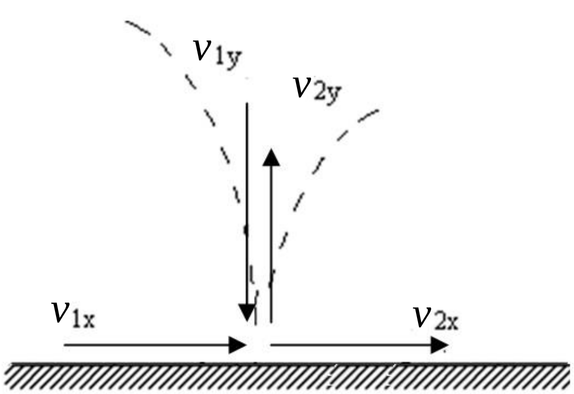
$$\sum F_y = ma_y$$
$$-mg = ma_y$$
$$a_y = -32.2$$
$$v_y = -32.2t$$
$$y = 3 - 16.1t^2$$

$$a_x = 0$$
$$v_x = 2$$
$$x = 2t$$

Cuando llega al suelo, $y = 0$, $x = b$

$$0 = 3 - 16.1t^2$$
$$t = \sqrt{\frac{3}{16.1}}$$
$$b = 2\left(\sqrt{\frac{3}{16.1}}\right)$$

$$\boxed{b = 0.863\ \text{ft}}$$



Al rebotar, la componente horizontal de la velocidad no sufre alteración. Las verticales cambian a causa del impacto.

$$(v_{1y} - v_S)e = v_S - v_{2y}$$

en donde v_S es la velocidad del suelo, que es nula.

$$v_{1y}(0.9) = -v_{2y}$$

en donde

$$v_{1y} = -32.2\left(\sqrt{\frac{3}{16.1}}\right) = -13.90$$

$$-13.90(0.9) = -v_{2y}$$

$$v_{2y} = 12.51$$

La pelota vuelve a quedar sujeta a la sola acción de su peso, y las ecuaciones del nuevo movimiento son:

$$a_y = -32.2$$
$$v_y = 12.51 - 32.2t$$
$$y = 12.51t - 16.1t^2$$

$$a_x = 0$$
$$v_x = 2$$
$x = 2t$ (tomando como $x = 0$ el punto del rebote)

La pelota vuelve a llegar al suelo si $y = 0$, $x = c$

$$0 = 12.51t - 16.1t^2$$
$$0 = 12.51 - 16.1t$$
$$t = \frac{12.51}{16.1}$$

$$c = 2\left(\frac{12.51}{16.1}\right)$$

$$\boxed{c = 1.554 \text{ ft}}$$