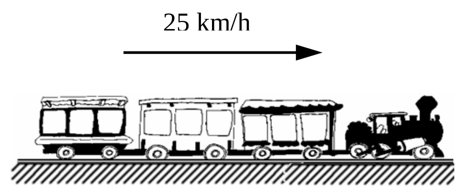
4. CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

4.1 Movimiento relativo de partículas

1. Un ferrocarril se mueve con velocidad constante de 25 km/h hacia el este. Uno de sus pasajeros, que originalmente está sentado en una ventanilla que mira al norte, se levanta y camina hacia la ventanilla del lado opuesto con un velocidad, relativa al ferrocarril, de 8 km/h. ¿Cuál es la velocidad absoluta del pasajero?



Resolución

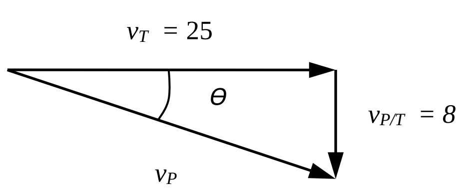
$\overline{v_P}$ − Velocidad absoluta del pasajero

$\overline{v_T}$ − Velocidad absoluta del tren

$\overline{v_{P/T}}$ − Velocidad relativa del pasajero respecto al tren.

$$\overline{v_P} = \overline{v_{P/T}} + \overline{v_T}$$

Dibujaremos un diagrama de vectores que represente la ecuación anterior.



La magnitud de la velocidad del pasajero es:

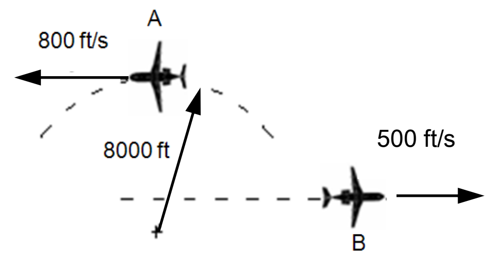
$$v_P = \sqrt{25^2 + 8^2}$$

Y su dirección

$$\tan\theta = \frac{8}{25}$$

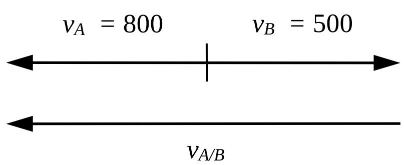
$$\boxed{v_P = 26.2\ \mathrm{km}/\mathrm{h} \quad \searrow 17.7^\circ}$$

2. Un avión *A* vuela con rapidez constante de 800 ft/s describiendo un arco de circunferencia de 8000 ft de radio. Otro avión, *B*, viaja en línea recta con una velocidad de 500 ft/s, que aumenta a razón de 30 ft/s². Determine la velocidad y aceleración relativas del avión *A* respecto al *B*.



Resolución

La velocidad absoluta de A es igual a la velocidad relativa de A respecto a B más la velocidad absoluta de B.



$$\overline{v_A} = \overline{v_{A/B}} + \overline{v_B}$$

Con el diagrama de vectores que representa la ecuación anterior se muestra que:

$$\boxed{\overline{v_{A/B}} = 1300 \ \text{ft/s} \leftarrow}$$

La aceleración de A es normal a la velocidad y su magnitud es:

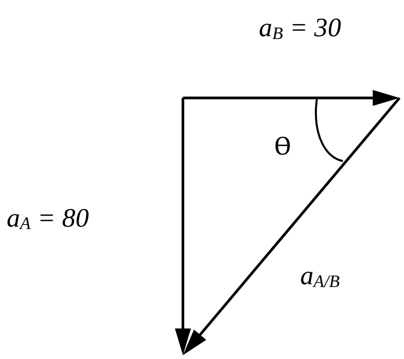
$$a_A = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_A = \frac{800^2}{8000}; \quad a_A = 80 \downarrow$$

y la de B es:

$$a_B = 30 \rightarrow$$

Entonces:



$$\overline{a_A} = \overline{a_{A/B}} + \overline{a_B}$$

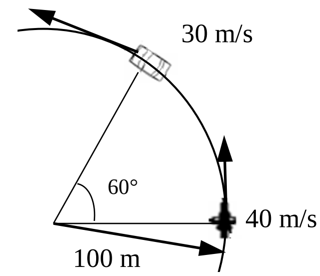
De la figura que representa la ecuación:

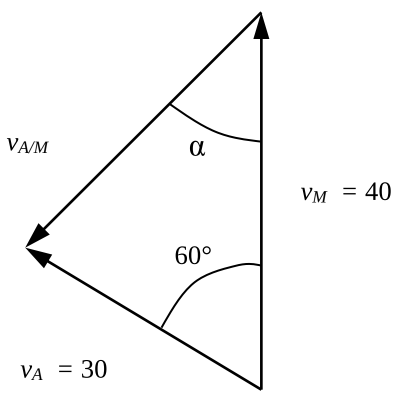
$$a_{A/B} = \sqrt{30^2 + 80^2}$$

$$\tan\theta = \frac{80}{30}$$

$$\boxed{a_{A/B} = 85.4 \ \text{ft/s}^2 \quad \swarrow \ 69.4°}$$

3. Un motociclista persigue a un automóvil en una pista circular de 100 m de radio. En el instante mostrado en la figura, el primero corre a 40 m/s y el segundo, a 30. ¿Cuál es la velocidad relativa del automóvil respecto al motociclista?





Resolución

$\overline{v_A}$ − Velocidad absoluta del automóvil

$\overline{v_M}$ − Velocidad absoluta del motociclista

$\overline{v_{A/M}}$ −Velocidad relativa del automóvil respecto al motociclista

$$\overline{v_A} = \overline{v_{A/M}} + \overline{v_M}$$

Como se trata de sólo tres vectores, dibujamos un diagrama que represente la ecuación anterior.

Por la ley de cosenos

$$v_{A/M}^{\;2} = 30^2 + 40^2 - 2(30)40\cos 60°$$

$$v_{A/M} = 36.1$$

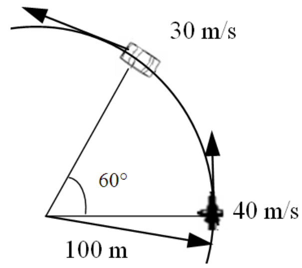
Por la ley de senos

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{30} = \frac{\text{sen}\,60}{v_{A/M}}$$

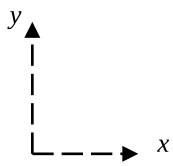
$$\alpha = 46.0°; \quad 90° - 46.0° = 44.0°$$

$$\boxed{v_{A/M} = 36.1\ \text{m/s} \quad 44°}$$

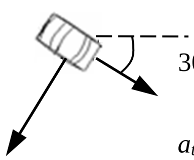
4. Un motociclista persigue a un automóvil en una pista circular de 100 m de radio. En el instante mostrado en la figura, el primero corre a 40 m/s y el segundo, a 30; el motociclista aumenta su rapidez a razón de 8 ft/s², mientras que el automóvil la reduce 5 m/s cada s. Calcule la aceleración relativa del automóvil respecto al motociclista.



Resolución



Para determinar la aceleración relativa del automóvil respecto al motociclista, elegiremos un sistema de referencia como el de la figura; entonces:

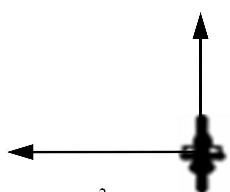


$$\overline{a_A} = (\overline{a_A})_n + (\overline{a_A})_t$$

$$= \frac{30^2}{100}\left(-i\,\text{sen}30° - j\cos 30°\right) + 5\left(i\cos 30° - j\,\text{sen}30°\right)$$

$$= -4.5i - 4.5\sqrt{3}j + 2.5\sqrt{3}i - 2.5j$$

$$\overline{a_A} = -0.1699i - 10.29j$$

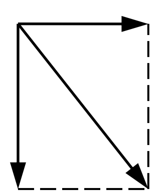


$$\overline{a_M} = (\overline{a_M})_n + (\overline{a_M})_t$$

$$= -\frac{40^2}{100}i + 8j$$

$$\overline{a_M} = -16i + 8j$$

Aceleración relativa:



$$\overline{a_A} = \overline{a_{A/M}} + \overline{a_M}$$

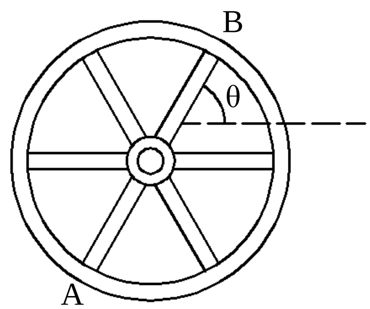
$$-0.1699i - 10.29j = \overline{a_{A/M}} - 16i + 8j$$

$$\overline{a_{A/M}} = 15.83i - 18.29j$$

$$\boxed{\overline{a_{A/M}} = 24.2 \ \text{m/s}^2 \quad 49.1°}$$

4.2 Rotación pura

5. El diámetro *AB* del volante de la figura se mueve según la expresión $\theta = 2t^3$, donde si t está en s, θ resulta en rad. ¿Cuál es la aceleración angular del volante cuando $t = 5$ s? ¿Cuántas revoluciones gira el volante hasta alcanzar una rapidez de 2400 rpm?



Resolución

$\theta = 2t^3$

$\dot{\theta} = 6t^2$

Es la velocidad angular del diámetro AB.

$\ddot{\theta} = 12t$

que es la aceleración angular del volante.

Para $t = 5$

$$\boxed{\ddot{\theta} = 60 \ \text{rad/s}^2 \ \circlearrowleft}$$

2400 rpm en rad/s son

$$2400\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 80\pi$$

El tiempo que tarda en alcanzar esa rapidez es:

$80\pi = 6t^2$

$$t = \sqrt{\frac{80\pi}{6}}$$

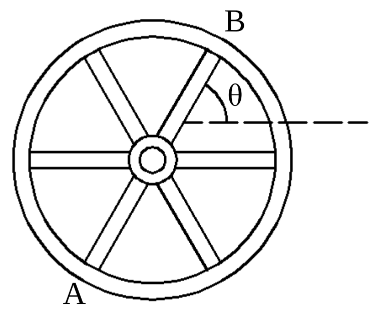
y la desviación angular correspondiente es:

$$\theta = 2\left(\sqrt{\frac{80\pi}{6}}\right)^3 \quad rad$$

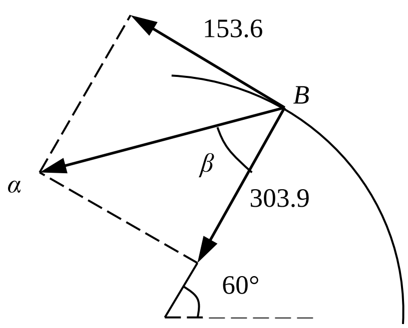
que en revoluciones son:

$$\frac{2\left(\sqrt{\frac{80\pi}{6}}\right)^3}{2\pi} = \boxed{86.3 \text{ rev}}$$

6. El diámetro *AB* del volante de la figura se desvía según la expresión $\theta = 2t^3$, donde si *t* está en s, θ resulta en rad. El volante tiene un radio de 20 cm en el instante mostrado, θ = 60º, determine: *a)* el valor de *t*. *b)* la velocidad y aceleración lineales del punto *B*.



Resolución:



a)

$$60° = \frac{\pi}{3}\ rad$$

$$\frac{\pi}{3} = 2t^3$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{t = 0.806\ \text{s}}$$

b)

$$\omega = \dot{\theta} = 6t^2$$

$$\omega = 6(0.806)^2 = 3.898$$

Como $v = \omega r$

$$v = 3.898(20)$$

$$\boxed{v = 78.0\ \text{cm/s} \quad 30°}$$

La aceleración normal del punto B es:

$$a_n = \omega^2 r = (0.898)^2 20 = 303.9$$

Y la tangencial

$a_t = \alpha r$

En donde $\alpha = \ddot{\theta} = 12t = 12(0.806) = 9.672$

$a_t = 9.672(20) = 193.44$

La magnitud de la aceleración de B es:

$a = \sqrt{303.9^2 + 193.44^2} = 360.2$

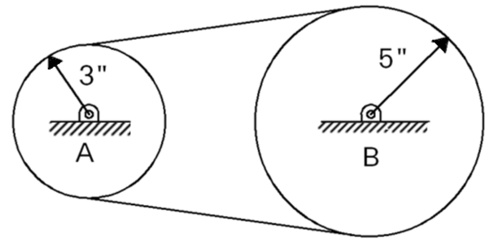
Y el ángulo β

$\tan\beta = \dfrac{193.44}{360.2}; \quad \beta = 32.5°$

Por tanto, como $60° - 32.5° = 27.5°$

$$\boxed{a = 360 \ \mathrm{cm}/\mathrm{s}^2 \quad \swarrow 27.5°}$$

7. La banda de la figura es flexible, inextensible y no se desliza sobre ninguna de la poleas. La polea *A*, de 3 in de radio, gira a 120 rpm. Calcule la rapidez de una partícula cualquiera de la banda y la velocidad angular de la polea *B*, de 5 in de radio.



Resolución

$v = \omega r$

Donde $\omega = 120\left(\frac{2\pi}{60}\right) \text{ rad/s} = 4\pi \text{ rad/s}$

$v = 4\pi(3)$

$\boxed{v = 37.7 \text{ in/s}}$

Como la expresión $v = \omega r$ puede emplearse con cualquiera de las poleas:

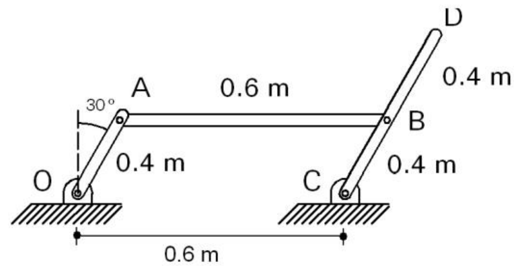
$$\omega_A r_A = \omega_B r_B$$

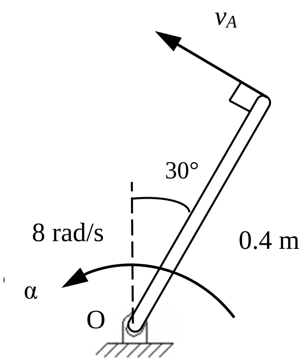
$$\omega_B = \frac{\omega_A r_A}{r_B} = \frac{120(3)}{5}$$

$\boxed{\omega_B = 72 \text{ rpm}}$

4.3 Traslación pura

8. La barra *OA* del mecanismo mostrado tiene una rapidez angular de 8 rad/s en sentido antihorario. Determine la velocidad y aceleración lineales de las articulaciones *A* y *B* así como del extremo *D* de la barra *CD*.



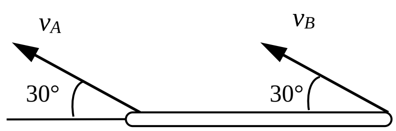


Resolución

Como la barra OA se mueve con rotación pura.

$$v_A = 8(0.4) = 3.2\,\mathrm{m/s} \quad 30°$$

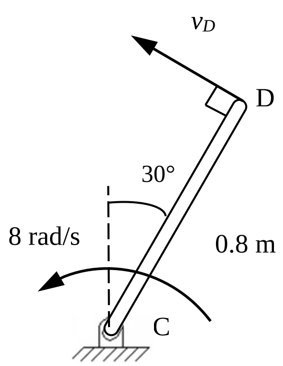
Puesto que la barra AB se mueve con traslación pura, todas sus partículas tienen la misma velocidad.



$$\overline{v_B} = \overline{v_A}$$

$$\boxed{v_B = 3.2\,\mathrm{m/s} \quad 30°}$$

La velocidad angular de la barra CD es:

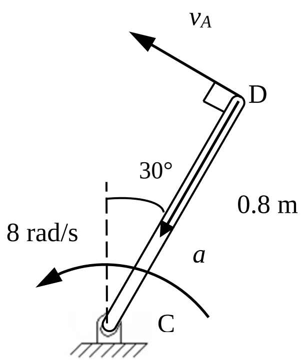


$$\omega_{CD} = \frac{v}{r} = \frac{3.2}{0.4} = 8 \ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Igual a la de la barra OA. Por tanto, la velocidad lineal del extremo D es:

$$v_D = \omega r = 8(0.8)$$

$$\boxed{v_D = 6.4\,\mathrm{m/s} \quad 30°}$$



Como la velocidad angular es constante, la aceleración de D no tiene componente tangencial.

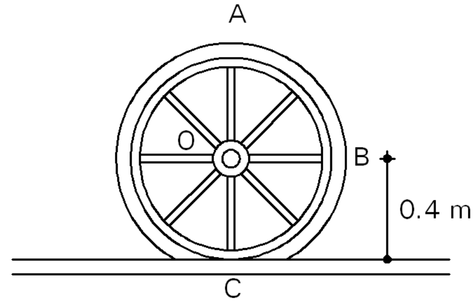
$$a = a_n = \omega^2 r = 8^2(0.8)$$

$$\boxed{a = 51.2\,\mathrm{m/s^2} \qquad 60°}$$

4.4 Movimiento plano general

4.4.1 Velocidades

9. La rueda de la figura pertenece a una locomotora que viaja hacia la derecha a 72 km/h. Sabiendo que la rueda no patina sobre los rieles, determine su velocidad angular y las velocidades lineales de los puntos *O*, *A*, *B* y *C*.



Resolución

Convertimos la velocidad a $\mathrm{m/s}$

$$72\,\mathrm{km/h} = \frac{7.2}{3.6}\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$$

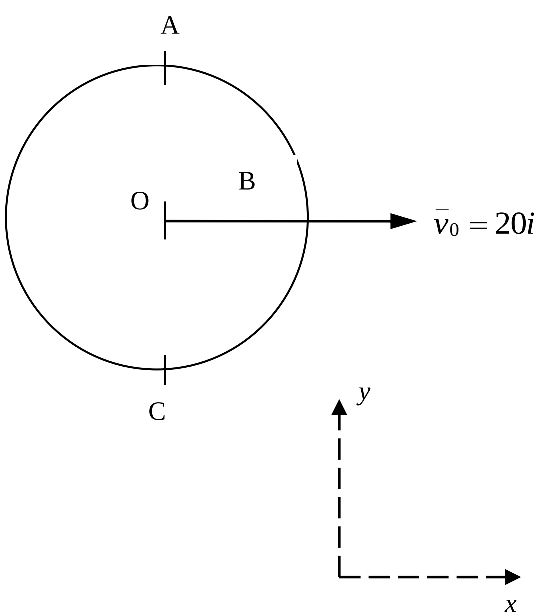
Como el punto O se mueve junto con la locomotora.

$$\boxed{v_O = 20\,\mathrm{m/s}}$$

Y la velocidad angular de la rueda es:

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{20}{0.4}$$

$$\boxed{\omega = 50\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}$$



Utilizamos la ecuación de la velocidad relativa para determinar las velocidades de A, B y C, tomando O como punto base. Emplearemos el sistema de referencia de la figura:

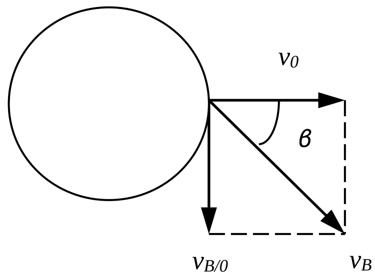
$$\overline{v_A} = \overline{v_{A/O}} + \overline{v_O}$$

$$\overline{v_A} = \overline{\omega} \times \overline{r_{A/O}} + \overline{v_O}$$

$$\overline{v_A} = -50k \times 0.4\,j + 20i$$

$$\overline{v_A} = 20i + 20i = 40i$$

$$\boxed{v_A = 40\ \mathrm{m/s}\ \rightarrow}$$



$$\overline{v_B} = \overline{\omega} \times \overline{r_{B/O}} + \overline{v_O}$$
$$\overline{v_B} = -50k \times 0.4i + 20i$$
$$\overline{v_B} = -20\,j + 20i$$

$$v_B = \sqrt{20^2(2)} = 20\sqrt{2} = 28.3$$
$$\tan\beta = \frac{20}{20} = 1 \quad \therefore \quad \beta = 45^\circ$$

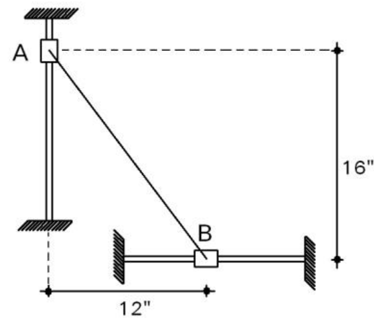
$$\boxed{v_B = 28.3 \ \mathrm{m/s} \ \searrow \ 45^\circ}$$

$$\overline{v_C} = \overline{\omega} \times \overline{r_{C/O}} + \overline{v_O}$$
$$\overline{v_C} = -50k \times (-0.4\,j) + 20i$$
$$\overline{v_C} = -20i + 20i$$

$$\boxed{v_C = 0}$$

Lo cual es evidente porque C tiene la misma velocidad del punto del riel con el que está en contacto y dicho punto no se mueve.

10. El collarín *A* se desliza hacia abajo con una rapidez de 30 in/s en el instante mostrado en la figura. Diga cuáles son, en ese mismo instante, la velocidad angular de la barra *AB* y la velocidad lineal del collarín *B*.



Resolución

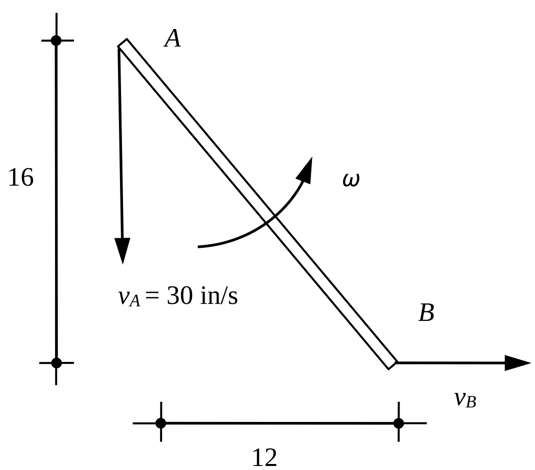
Como:

$$\overline{v_B} = \overline{v_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$\overline{v_B} = \overline{\omega} \times \overline{r_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$v_B i = \omega k \times (12i - 16j) - 30j$$

$$v_B i = 16\omega i + 12\omega j - 30j$$



Reduciendo términos semejantes

$$v_B i = 16\omega i + (12\omega - 30)j$$

Que es una igualdad de vectores. Igualando las componentes verticales tenemos:

$$0 = 12\omega - 30$$

$$\omega = \frac{30}{12}$$

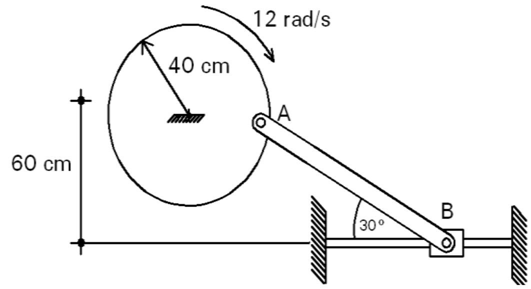
$$\boxed{\omega = 2.5 \ \mathrm{rad/s} \ \circlearrowleft}$$

E igualando las componentes horizontales:

$$v_B = 16(2.5)$$

$$\boxed{v_B = 40 \ \mathrm{in/s} \rightarrow}$$

11. El disco de la figura gira con rapidez angular constante de 12 rad/s en sentido horario. Calcule, para la posición mostrada en la figura, la velocidad angular de la barra *AB* y la velocidad lineal del collarín *B*.

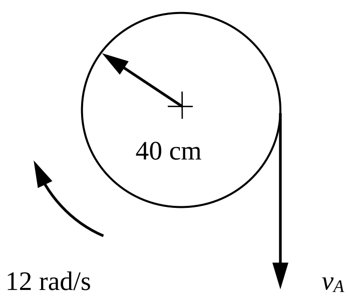


Resolución

Como el disco se mueve con rotación pura:

$$v_A = \omega r$$

$$v_A = 12(40) = 480 \ {}^{\text{cm}}\!/_{\text{s}} \ \downarrow$$



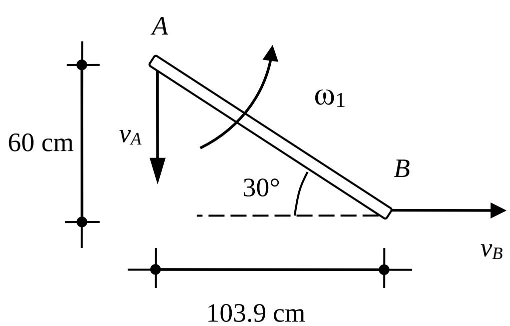
La barra AB tiene movimiento plano general y su geometría se muestra en la figura.

$$\overline{v_B} = \overline{v_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$\overline{v_B} = \overline{\omega_1} \times \overline{r_{B/A}} + \overline{v_A}$$

$$\overline{v_B} = \omega_1 k \times (103.9i - 60j) - 480j$$

$$v_B i = 60\omega_1 i + 103.9\omega_1 j - 480j$$



Reduciendo términos semejantes

$$v_B i = 60\omega_1 i + (103.9\omega_1 - 480)j$$

Que es una igualdad de dos vectores. Igualando las componentes verticales se tiene:

$$0 = 103.9\omega_1 - 480$$

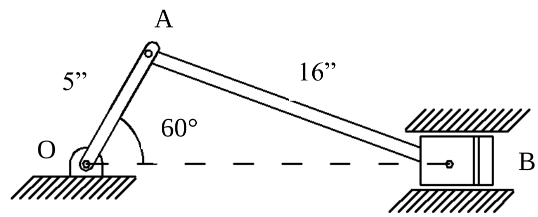
$$\boxed{\omega_1 = 4.62 \ {}^{\text{rad}}\!/_{\text{s}} \ \circlearrowleft}$$

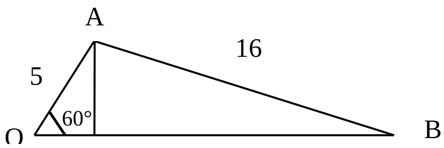
Igualando las componentes horizontales:

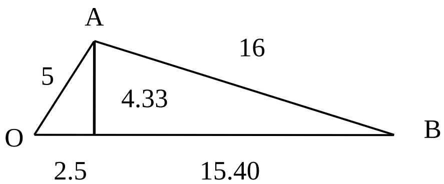
$$v_B = 60(4.66)$$

$$\boxed{v_B = 277 \ {}^{\text{cm}}\!/_{\text{s}} \ \rightarrow}$$

12. En la posición mostrada, la manivela *OA* tiene una rapidez angular de 10 rad/s en sentido antihorario. Calcule la rapidez angular de la biela *AB* y la velocidad lineal del émbolo *B*.





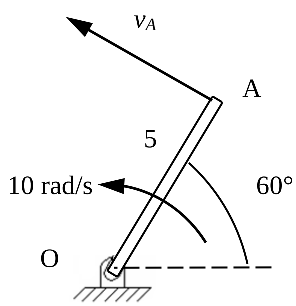


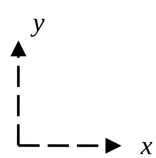
Resolución

Comenzamos investigando la geometría del mecanismo mediante la resolución de los triángulos rectángulos de la figura.

La manivela OA gira con rotación pura.

$$\overline{v_A} = \overline{\omega} \times \overline{r}$$
$$\overline{v_A} = 10k \times (2.5i + 4.33j)$$
$$\overline{v_A} = -43.3i + 25j$$





La biela AB tiene movimiento plano general.

$$\overline{v_B} = \overline{v_{B/A}} + \overline{v_A}$$
$$\overline{v_B} = \overline{\omega_1} \times \overline{r_{B/A}} + \overline{v_A}$$
$$\overline{v_B} = \omega_1 k \times (15.40i - 4.33j) - 43.3i + 25j$$
$$v_B i = 4.33\omega_1 i + 15.40\omega_1 j - 43.3i + 25j$$

Asociando las componentes respectivas:

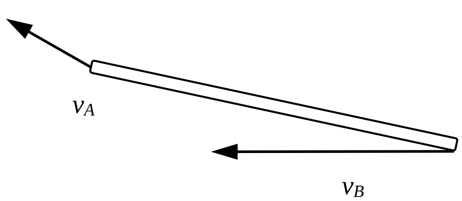
$$v_B i = (4.33\omega_1 - 43.3)i + (15.40\omega_1 + 25)j$$

Igualando las componentes verticales:

$$0 = 15.40\omega_1 + 25; \quad \omega_1 = -1.623$$

Y las horizontales:

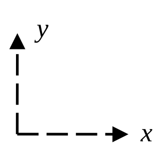
$$v_B = 4.33(-1.623) - 43.3 = -50.3$$



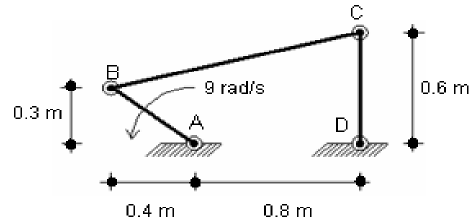
Por tanto:

$$\boxed{\omega_1 = 1.623\,{}^{rad}\!/_{s} \;\circlearrowright}$$

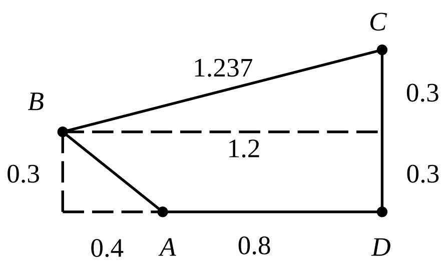
$$\boxed{v_B = 50.3\,{}^{in}\!/_{s} \;\leftarrow}$$



13. La barra *AB* del mecanismo de cuatro articulaciones de la figura gira con una velocidad angular ω_1 de 9 rad/s en sentido antihorario. Determine las velocidades angulares ω_2 y ω_3 de las barras *BC* y *CD*.



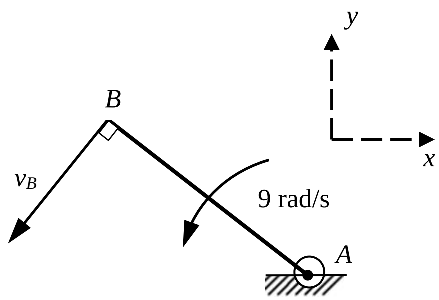
Resolución



Comenzaremos determinando la geometría del mecanismo en el instante de interés.

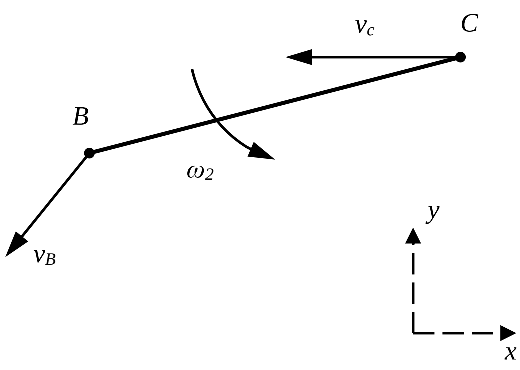
Tanto la barra AB como la barra CD se mueven con rotación pura. Observamos que C se mueve a la izquierda y que:

$$\overline{v_B} = \overline{\omega_1} \times \overline{r}$$
$$\overline{v_B} = 9k \times (-0.4i + 0.3j)$$
$$\overline{v_B} = -2.7i - 3.6j$$



La barra BC tiene movimiento plano general.

$$\overline{v_C} = \overline{v_{C/B}} + \overline{v_B}$$
$$\overline{v_C} = \overline{\omega_2} \times \overline{r_{C/B}} + \overline{v_B}$$
$$-v_C i = \omega_2 k \times (1.2i + 0.3j) - 2.7i - 3.6j$$
$$-v_C i = -0.3\omega_2 i + 1.2\omega_2 j - 2.7i - 3.6j$$



Asociando términos

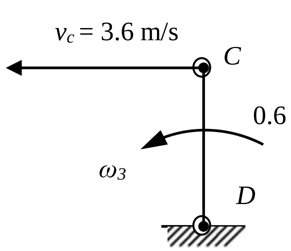
$$-v_C i = (-0.3\omega_2 - 2.7)i + (1.2\omega_2 - 3.6)j$$

Igualando las componentes en dirección de y:

$$0 = 1.2\omega_2 - 3.6; \quad \boxed{\omega_2 = 3 \ \text{rad/s} \ \circlearrowleft}$$

Haciendo lo mismo en dirección de x:

$$-v_C = -0.3(3) - 2.7; \quad v_C = 3.6 \ \leftarrow$$



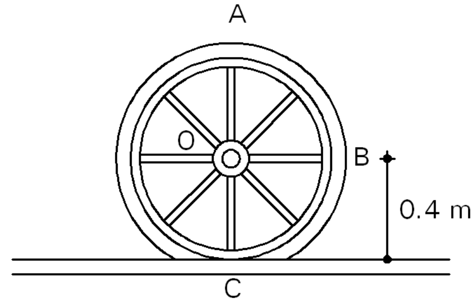
De la barra CD obtenemos:

$$-v_C = \omega_3 r_{C/D}; \qquad \omega_3 = \frac{3.6}{0.6}$$

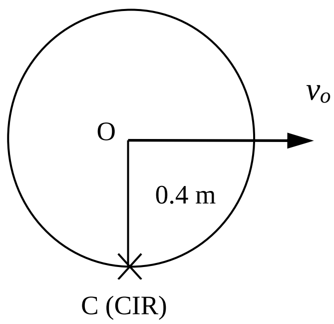
$$\boxed{\omega_3 = 6 \ \text{rad/s} \ \circlearrowleft}$$

4.4.2 Centro instantáneo de rotación

14. La rueda de la figura pertenece a una locomotora que viaja hacia la derecha a 72 km/h. Sabiendo que la rueda no patina sobre los rieles, determine su velocidad angular y las velocidades lineales de los puntos *0*, *A*, *B* y *C*.



Resolución



El centro instantáneo de rotación de la rueda es el punto de contacto con el riel, el punto C, puesto que su velocidad es nula.

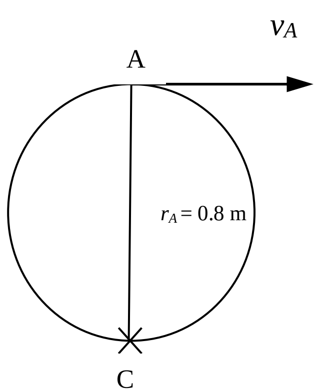
El punto O, que une el eje de la rueda con la locomotora, tiene una velocidad de 72 km/h.

$$v_O = 72\ \text{km/h} = \frac{72}{3.6}\ \text{m/s} = 20\ \text{m/s}\ \rightarrow$$

La velocidad angular de la rueda es por tanto:

$$\omega = \frac{v_o}{r} = \frac{20}{0.4}$$

$$\boxed{\omega = 50\ \text{rad/s}}$$



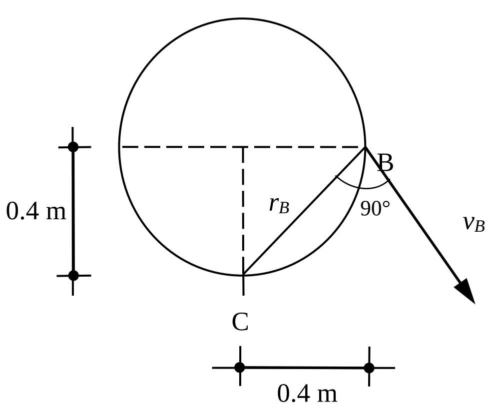
Conociendo la posición del centro de instantáneo de rotación (CIR) y la velocidad angular de la rueda, se puede calcular fácilmente la velocidad de cualquier punto de la rueda.

$$v_A = \omega r_A$$
$$v_A = 50(0.8)$$

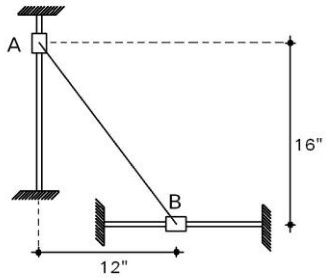
$$\boxed{v_A = 40\ \text{m/s} \rightarrow}$$

$$v_B = \omega r_B$$
$$v_B = 50\left(0.4\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{v_B = 28.3\ \text{m/s} \quad 45°}$$

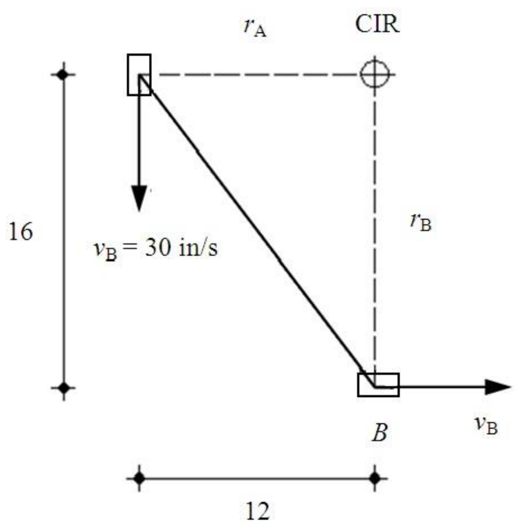


15. El collarín *A* se desliza hacia abajo con una rapidez de 30 in/s en el instante mostrado en la figura. Diga cuáles son, en ese mismo instante, la velocidad angular de la barra *AB* y la velocidad lineal del collarín *B*.



Resolución

Para encontrar la posición del centro instantáneo de rotación, hacemos tanto en A como en B rectas perpendiculares a las velocidades de esos puntos; su intersección es el centro buscado.



La velocidad angular de la barra es:

$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{30}{12}$$

$$\boxed{\omega = 2.5 \ \text{rad}/\text{s} \ \circlearrowleft}$$

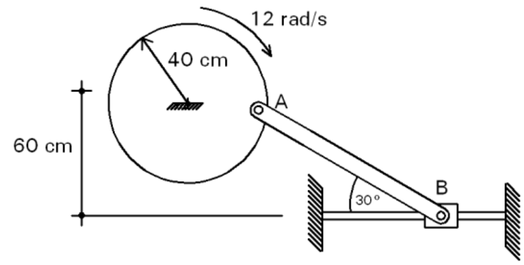
Y la velocidad de B

$$v_B = \omega \ r_B$$

$$v_B = 2.5(16)$$

$$\boxed{v_B = 40 \ \text{in}/\text{s} \ \rightarrow}$$

16. El disco de la figura gira con rapidez angular constante de 12 rad/s en sentido horario. Calcule, para la posición mostrada en la figura, la velocidad angular de la barra *AB* y la velocidad lineal del collarín *B*.



Resolución

La velocidad de A es vertical y se dirige hacia abajo, la de B, horizontal y hacia la derecha. El centro instantáneo de rotación se encuentra en la intersección de las perpendiculares levantadas en A y B.

Calculamos la magnitud de la velocidad de A.

$$v_A = \omega\ r$$
$$v_A = 12(60) = 720$$

Por tanto, la velocidad angular de la barra AB es:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{r_A} = \frac{720}{60\sqrt{3}}$$

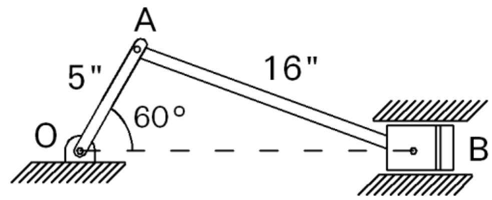
$$\boxed{\omega_{AB} = 6.93\ \text{rad}/\text{s}\ \circlearrowleft}$$

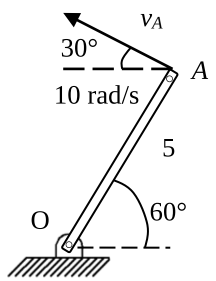
Y la velocidad de B será:

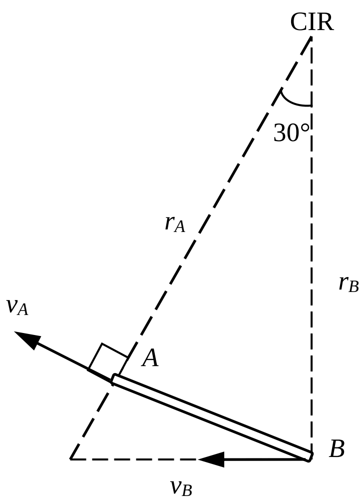
$$v_B = \omega_{AB}\ r_B$$
$$v_B = 6.93(60)$$

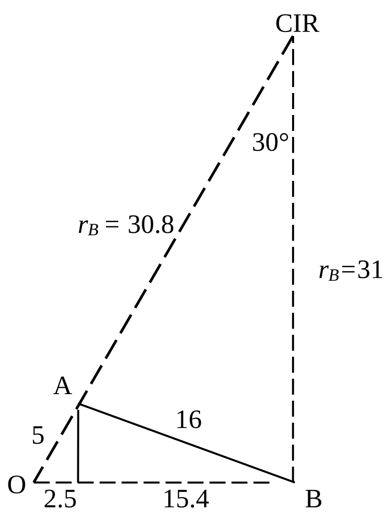
$$\boxed{v_B = 416\ \text{cm}/\text{s}\ \rightarrow}$$

17. En la posición mostrada, la manivela *OA* tiene una rapidez angular de 10 rad/s en sentido anti-horario. Calcule la rapidez angular de la biela *AB* y la velocidad lineal del émbolo *B*.









Resolución

La velocidad de la articulación A es perpendicular a la manivela OA y su magnitud es:

$$v_A = \omega_{OA}\ r_{OA}$$
$$v_A = 10(5) = 50$$

La velocidad de B es horizontal y se dirige hacia la izquierda.

La posición del centro instantáneo de rotación (CIR) de la biela AB es la intersección de las perpendiculares a las velocidades de A y B trazadas desde dichos puntos.

En la figura resolvemos la geometría del mecanismo.

De ahí:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{r_A} = \frac{50}{30.8}$$

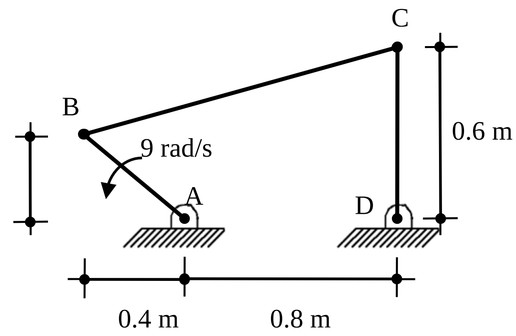
$$\boxed{\omega_{AB} = 1.623\ \text{rad/s}\ \circlearrowright}$$

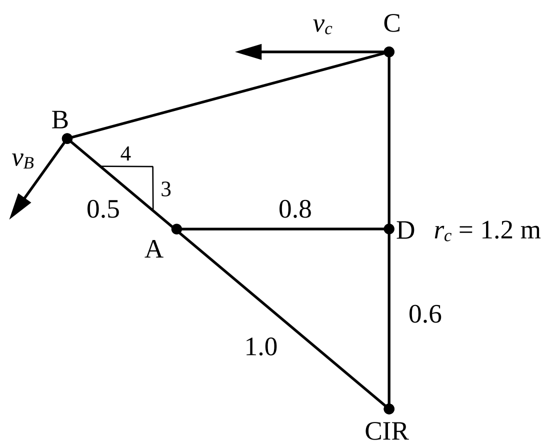
Por tanto:

$$v_B = \omega_{AB}\ r_B$$
$$v_B = 1.697(31.1)$$

$$\boxed{v_B = 50.3\ \text{in/s}\ \leftarrow}$$

18. La barra *AB* del mecanismo de cuatro articulaciones de la figura gira con una velocidad angular ω_1 de 9 rad/s en sentido antihorario. Determine las velocidades angulares ω_2 y ω_3 de las barras *BC* y *CD*, en la posición mostrada.





Resolución

Las articulaciones B y C tienen velocidades perpendiculares a las barras AB y CD, respectivamente, que se mueven con rotación pura. Además, la velocidad de B es:

$$v_B = \omega_{AB}\ r_{AB}$$
$$v_B = 9(0.5) = 4.5$$

Para hallar el centro instantáneo de rotación de la barra BC prolongamos las barras AB y CD y encontramos su intersección.

Puesto que la distancia de dicho centro al punto B es de 1.5 m, entonces:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{r_B} = \frac{4.5}{1.5}$$

$$\boxed{\omega_2 = 3\ \text{rad}/\text{s}\ \circlearrowleft}$$

Cuyo sentido se deduce de la observación de la figura

$$v_C = \omega_2 r_c$$
$$v_C = 3(1.2)$$
$$v_c = 3.6\ \text{m}/\text{s}\ \leftarrow$$

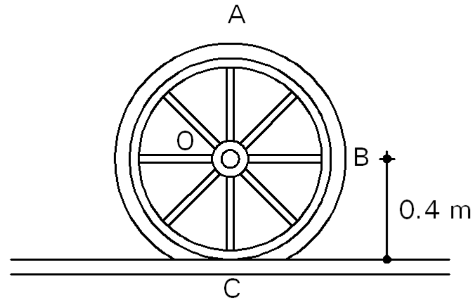
Por tanto:

$$\omega_3 = \frac{v_C}{r_C} = \frac{3.6}{0.6}$$

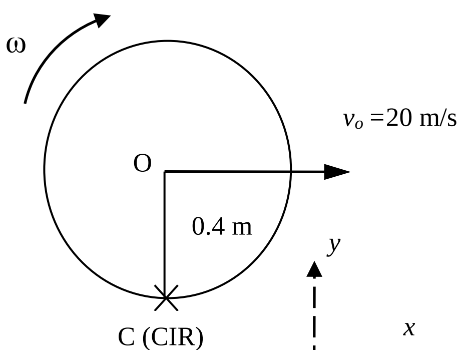
$$\boxed{\omega_3 = 6\ \text{rad}/\text{s}\ \circlearrowleft}$$

4.4.3 Aceleraciones

19. La rueda de la figura pertenece a una locomotora que viaja hacia la derecha a 72 km/h, aumentando su rapidez a razón de 4 m/s^2. Sabiendo que la rueda no patina sobre los rieles, determine su aceleración angular y las aceleraciones lineales de los puntos *O*, *A*, *B* y *C*.



Resolución



Para obtener las aceleraciones lineales de los puntos de la rueda, se necesita conocer su velocidad angular. Sabiendo que la velocidad de O es de:

$$72 \ \mathrm{km/h} = 20 \ \mathrm{m/s}:$$

$$\omega = \frac{v_O}{r} = \frac{20}{0.4} = 50$$

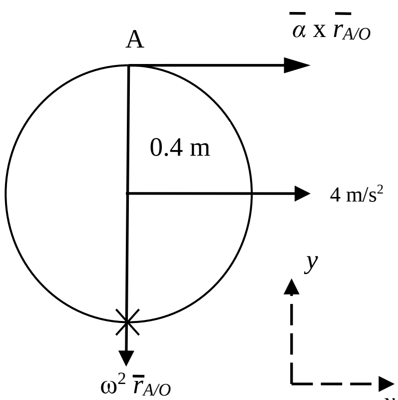
Como su sentido es horario, el vector velocidad angular en el sistema de referencia mostrado es:

$$\bar{\omega} = -50k$$

La aceleración lineal del punto O es igual a la de la locomotora.

$$a_O = 4 \ \mathrm{m/s^2} \rightarrow$$

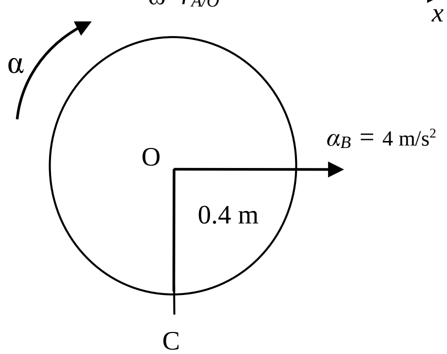
$$\bar{a}_O = 4i$$



La aceleración angular de la rueda es:

$$\alpha = \frac{a_O}{r} = \frac{4}{0.4}$$

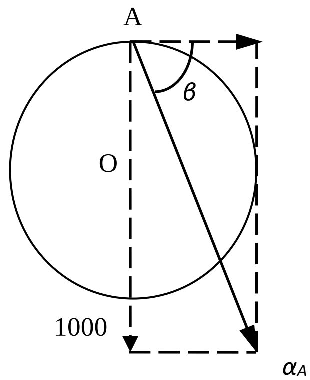
$$\boxed{\alpha = 10 \ \mathrm{rad/s^2} \ \circlearrowright}$$



El vector aceleración angular es $\bar{\alpha} = -10k$

Para calcular las aceleraciones lineales de los puntos, emplearemos las ecuaciones de movimiento relativo.

$$\overline{a_A} = \overline{a_{A/O}} + \overline{a_O}$$



Es decir:

$$\overline{a_A} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{A/O}} - \omega^2 \overline{r_{A/O}} + \overline{a_O}$$

$$\overline{a_A} = -10k \times 0.4j - (-50)^2 0.4j + 4i$$

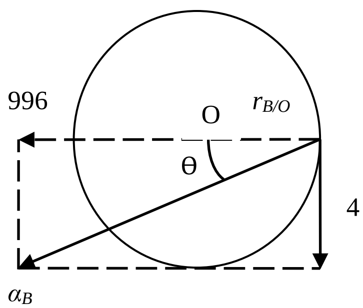
$$\overline{a_A} = 4i - 1000j + 4i$$

$$\overline{a_A} = 8i - 1000j$$

$$a_A = \sqrt{8^2 + 1000^2}$$

$$\tan\beta = \frac{1000}{8}$$

$$\boxed{a_A = 1000 \ \text{m}/\text{s}^2 \quad 89.5°}$$



De modo semejante, determinaremos las aceleraciones de los puntos B y C.

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/O}} - \omega^2 \overline{r_{B/O}} + \overline{a_O}$$

$$\overline{a_B} = -10k \times 0.4i - (-50)^2 0.4i + 4i$$

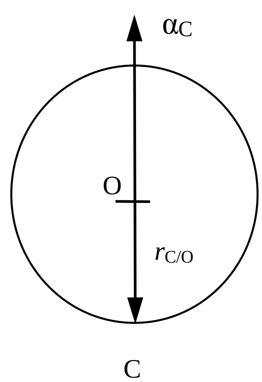
$$\overline{a_B} = -4j - 1000i + 4i$$

$$\overline{a_B} = -996i - 4j$$

$$a_B = \sqrt{996^2 + 4^2}$$

$$\tan\gamma = \frac{4}{996}$$

$$\boxed{a_B = 996 \ \text{m}/\text{s}^2 \quad 0.23°}$$



$$\overline{a_C} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{C/O}} - \omega^2 \overline{r_{C/O}} + \overline{a_O}$$

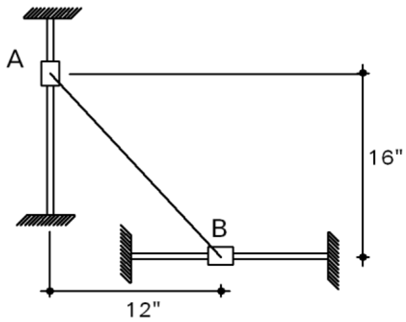
$$\overline{a_C} = -10k \times (-0.4j) - (50)^2 (-0.4j) + 4i$$

$$\overline{a_C} = -4i + 1000j + 4i$$

$$\overline{a_C} = 1000j$$

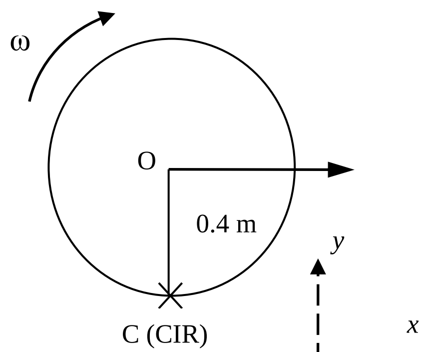
$$\boxed{\overline{a_C} = 1000 \ \text{m}/\text{s}^2 \ \uparrow}$$

20. El collarín *A* se desliza, en el instante mostrado en la figura, hacia abajo con una rapidez de 30 in/s, que aumenta a razón de 140 in/s^2. Diga cuáles son, en ese mismo instante, la aceleración angular de la barra *AB* y la aceleración lineal del collarín *B*.



Resolución

Para obtener las aceleraciones, tanto de la barra como del collarín B, emplearemos la ecuación de movimiento relativo.



$$\overline{a_B} = \overline{a_{B/A}} + \overline{a_A}$$

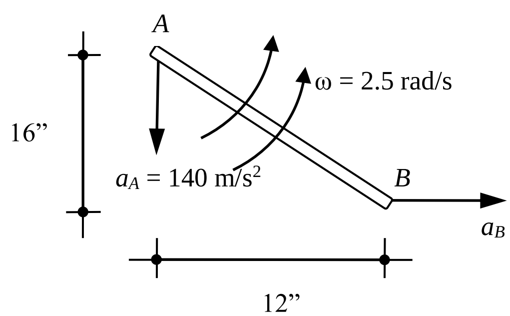
$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} - \omega^2 \overline{r_{B/A}} + \overline{a_A}$$

En el sistema de referencia mostrado y sabiendo que la velocidad angular de la barra es $\omega = 2.5 \ rad/s$ ↺ (ver problemas 10 y 15)

$$a_B i = \alpha k \times (12i - 16j) - 2.5^2(12i - 16j) - 140j$$

$$a_B i = 16\alpha i + 12\alpha j - 75i + 100j - 140j$$

$$a_B i = (16\alpha - 75)i + (12\alpha - 40)j$$

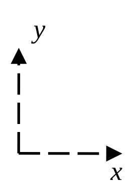


Igualando las componentes verticales:

$$0 = 12\alpha - 40$$

$$\alpha = \frac{40}{12}$$

$$\boxed{\alpha = 3.33 \ \mathrm{rad/s^2} \ ↺}$$



Igualando las componentes horizontales

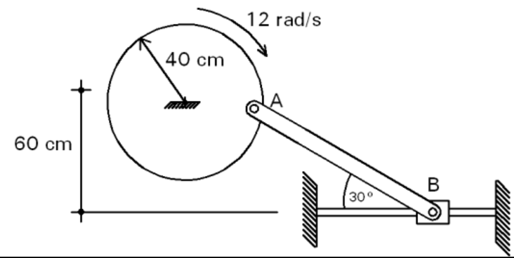
$$a_B = 16(3.33) - 75$$

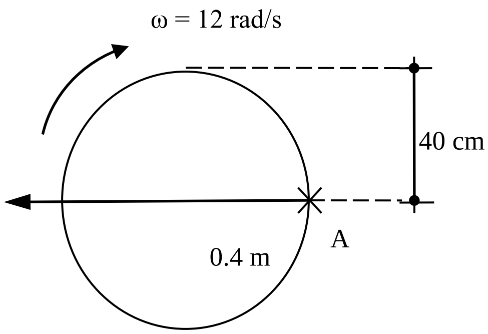
$$a_B = -21.7$$

$$\boxed{a_B = 21.7 \ \mathrm{in/s^2} \ \leftarrow}$$

El signo negativo quiere decir que su sentido es contrario al que se supuso.

21. El disco de la figura gira con rapidez angular constante de 12 rad/s en sentido horario. Calcule, para la posición mostrada en la figura, la aceleración angular de la barra *AB* y la aceleración lineal del collarín *B*.





Resolución

Como la rapidez del disco es constante, la partícula A tiene una aceleración igual a su componente normal.

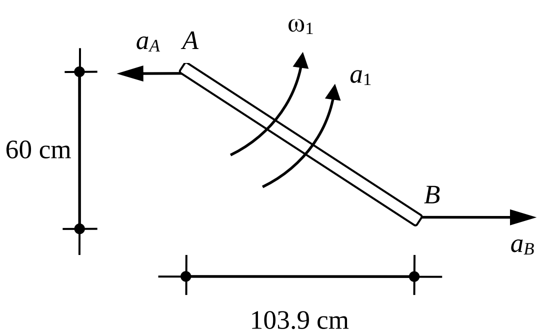
$$a_A = \omega^2 r = 12^2(40)$$

$$a_A = 5760 \ {}^{cm}\!/\!_{s^2} \ \leftarrow$$

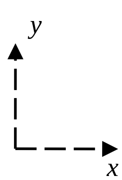
Para calcular la aceleración angular de la barra, que tiene movimiento plano general, y la aceleración lineal del collarín, utilizamos la ecuación del movimiento relativo.

$$\overline{a_B} = \overline{a_{B/A}} + \overline{a_A}$$

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} - \omega_1^2 \overline{r_{B/A}} + \overline{a_A}$$



Sabiendo que ω_1, la velocidad angular de la barra, es de 4.62 ${}^{rad}\!/\!_{s}$ $\circlearrowright$ y refiriéndonos al sistema cartesiano mostrado.



$$a_B i = \alpha \ k \times (103.9i - 60j) - 4.62^2(103.9i - 60j) - 5760i$$

$$a_B i = 60\alpha \ i + 103.9\alpha \ j - 2218i + 1281j - 5760i$$

Reduciendo términos semejantes

$$a_B i = (60\alpha - 7978)i + (103.9\alpha + 1281)j$$

Igualando las componentes en dirección del eje de las yes.

$$0 = 103.9\alpha + 1281$$

$$\alpha = \frac{-1281}{103.9} = -12.33$$

$$\boxed{\alpha = 12.33 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowright}$$

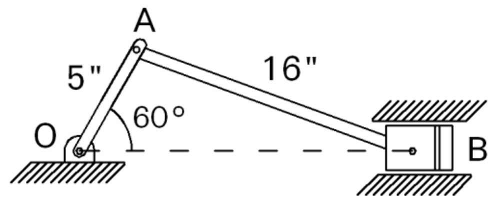
E igualando las componentes en dirección x'x

$$a_B = 60(-12.33) - 7978 = -8720$$

$$\boxed{a_B = 8720 \ \mathrm{cm}/\mathrm{s}^2 \ \leftarrow}$$

Los signos negativos indican que los sentidos son opuestos a los que se supusieron.

22. En la posición mostrada, la manivela *OA* tiene una rapidez angular de 10 rad/s en sentido antihorario y una aceleración angular de 50 rad/s^2 en sentido horario. Calcule la aceleración angular de la biela *AB* y la aceleración lineal del émbolo *B*.



Resolución

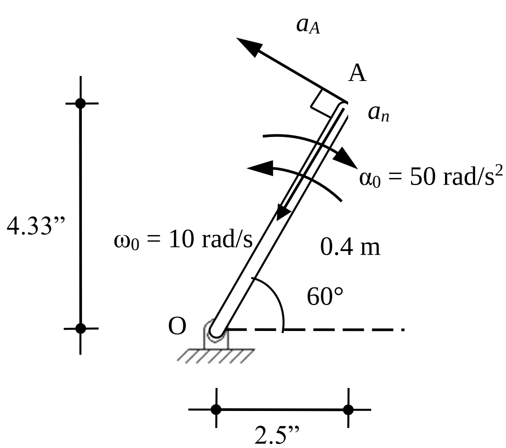
Para calcular la aceleración angular de la biela AB, que tiene movimiento plano general, y la aceleración lineal del émbolo B, usaremos la ecuación del movimiento relativo.

$$\overline{a_B} = \overline{a_{B/A}} + \overline{a_A}$$

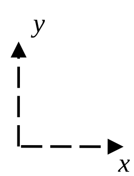
O sea:

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha} \times \overline{r_{B/A}} - \omega^2 \overline{r_{B/A}} + \overline{a_A}$$

Por tanto, necesitamos conocer previamente la velocidad angular ω de la biela, la cual es de 1.623 rad/s en sentido horario. (v. Probs. 12 y 17)



A partir del estudio de la manivela OA, que gira con rotación pura, determinaremos la aceleración lineal del punto A, utilizando el sistema de referencia mostrado.



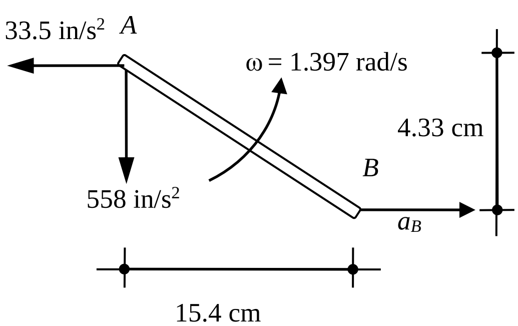
$$\overline{a_A} = \left(\overline{a_A}\right)_t + \left(\overline{a_A}\right)_n$$

$$\overline{a_A} = \overline{\alpha_O} \times \overline{r} - \omega_O{}^2\, \overline{r}$$

$$\overline{a_A} = -50k \times (2.5i + 4.33j) - 10^2 (2.5i + 4.33j)$$

$$\overline{a_A} = 216.5i - 125j - 250i - 433j$$

$$\overline{a_A} = -33.5i - 558j$$



Y la ecuación del movimiento relativo queda así

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{B/A} + \bar{a}_A$$

$$\bar{a}_B = \bar{\alpha} \times \bar{r}_B - \omega^2 \bar{r} + (-33.5i - 558j)$$

$$a_B i = \alpha k \times (15.4i - 4.33j) - 1.623^2 (15.4i - 4.33j)$$
$$- 33.5i - 558j$$

$$a_B i = 4.33\alpha\ i + 15.4\alpha\ j - 40.5i + 8.45j$$
$$+ 11.406i - 33.5i - 558j$$

$$a_B i = (4.33\alpha - 74.07)i + (15.4\alpha - 546.6)j$$

Igualando las componentes verticales:

$$0 = 15.4\alpha - 546.6$$

$$\alpha = \frac{546.6}{15.4}$$

$$\boxed{\alpha = 35.5 \ \mathrm{rad/s^2} \ \circlearrowleft}$$

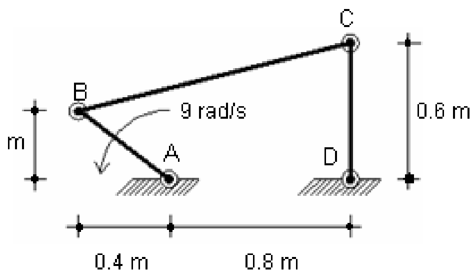
e igualando las componentes horizontales

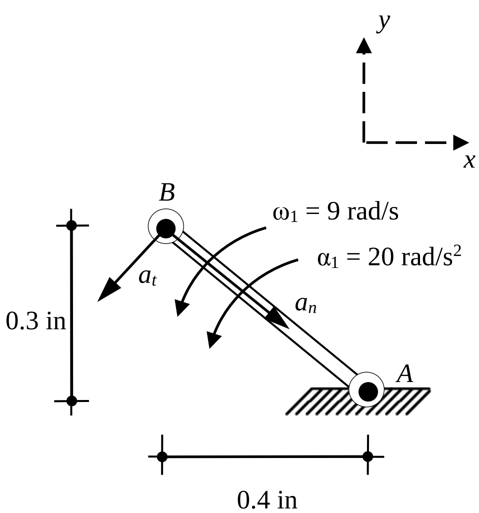
$$a_B = 4.33(35.5) - 74.07$$

El signo negativo indica que el sentido de la aceleración es contrario al supuesto.

$$\boxed{a_B = 79.6 \ \mathrm{in/s^2} \ \leftarrow}$$

23. La barra *AB* del mecanismo de cuatro articulaciones de la figura gira con una velocidad angular ω_1 de 9 rad/s en sentido antihorario y una aceleración angular α_1 de 20 rad/s^2 también en sentido antihorario. Determine las aceleraciones angulares α_2 y α_3 de las barras *BC* y *CD*.





Resolución

Las barras AB y CD tienen rotación pura y la BC, movimiento plano general.

Para poder determinar las aceleraciones angulares de las barras es necesario conocer primero sus velocidades angulares.

La velocidad angular de la barra BC es $\omega_2 = 3 \ \mathrm{rad/s}$ ↺

y de la barra CD, $\omega_3 = 6 \ \mathrm{rad/s}$ ↺

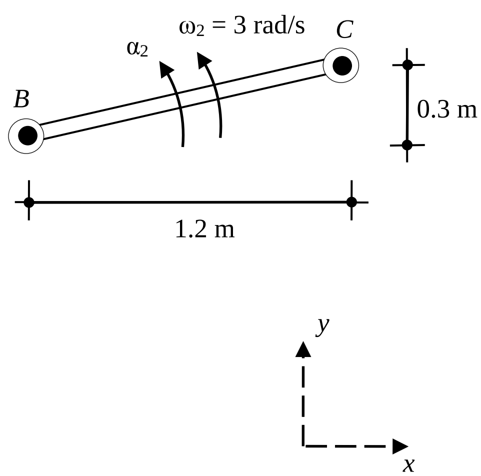
(ver problemas 13 y 18)

Empleamos la ecuación del movimiento relativo para el estudio de la barra BC, tomando B como punto base; pues podemos conocer la aceleración de dicho punto.

$$\overline{a_C} = \overline{a_{C/B}} + \overline{a_B}$$

O sea:

$$\overline{a_C} = \overline{\alpha_2} \times \overline{r_{C/B}} - \omega^2 \overline{r_{C/B}} + \overline{a_B}$$

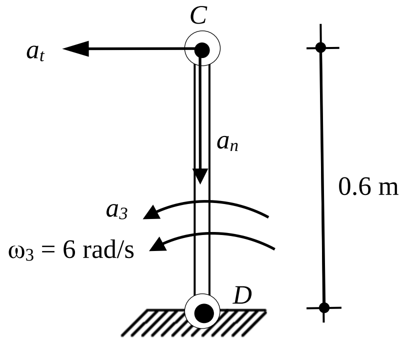


La aceleración de B la obtendremos estudiando la barra AB y utilizando el sistema de referencia mostrado.

$$\overline{a_B} = \overline{\alpha_1} \times \overline{r_1} - \omega_1{}^2 \overline{r_1}$$
$$\overline{a_B} = 20k \times (-0.4i + 0.3j) - 9^2(-0.4i + 0.3j)$$
$$\overline{a_B} = -6i - 8j + 32.4i - 24.3j$$
$$\overline{a_B} = 26.4i - 32.3j$$

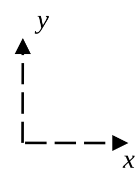
Sustituyendo en la ecuación que escribimos arriba:

$$\overline{a_C} = \alpha_2 k \times (1.2i + 0.3j) - 3^2(1.2i + 0.3j) + 26.4i - 32.3j$$



Como puede verse, en la ecuación anterior hay tres incógnitas: las dos componentes de a_C y α_2. Como en esa ecuación vectorial puede haber hasta un máximo de dos incógnitas, es imprescindible investigar alguna componente de a_C. Para ello analizaremos la barra CD.

$$\overline{a_C} = \overline{\alpha_3} \times \overline{r_3} - \omega_3{}^2 \overline{r_3}$$
$$\overline{a_C} = \alpha_3 k \times 0.6j - 6^2(0.6j)$$
$$\overline{a_C} = -0.6\alpha_3 i - 21.6j$$



Conocida la componente vertical, volvemos a la ecuación que dejamos pendiente, en la que sólo quedan dos incógnitas: α_2 y α_3.

$$-0.6\alpha_3 i - 21.6j = \alpha_2 k \times (1.2i + 0.3j) - 3^2(1.2i + 0.3j)$$
$$+ 26.4i - 32.3j$$

Desarrollando y reduciendo términos

$$-0.6\alpha_3 i - 21.6j = -0.3\alpha_2 i + 1.2\alpha_2 j - 10.8i - 2.7j$$

$$+26.4i - 32.3j$$

$$-0.6\alpha_3 i - 21.6j = (-0.3\alpha_2 i + 15.6)i + (1.2\alpha_2 - 35)j$$

Igualando las componentes verticales

$$-21.6 = 1.2\alpha_2 - 35$$
$$1.2\alpha_2 = 13.4$$
$$\alpha_2 = \frac{13.4}{1.2}$$

$$\boxed{\alpha_2 = 11.17 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowleft}$$

Ahora, igualando las componentes horizontales

$$-0.6\alpha_3 = -0.3(11.17) + 15.6$$
$$\alpha_3 = -\frac{12.25}{0.6}$$
$$\boxed{\alpha_3 = 20.4 \ \mathrm{rad}/\mathrm{s}^2 \ \circlearrowright}$$

La aceleración α_3 de la barra CD tiene sentido horario, pues el signo negativo indica que es contrario al que se supuso.